F12: Primitiva funktioner. Partialbråksuppdelning.

8 oktober 2008

DEFINITION: En funktion $F(x)$ är **primitiv** till $f(x)$ på ett intervall I om $F'(x) = f(x)$ på I.

NOTATION: Vi skriver

$$\int f(x)\, dx$$

för att beteckna en godtycklig primitiv funktion till $f(x)$ på ett tänkt intervall.

Några exempel

EXEMPEL: Vi finner att

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,$$

där C är en godtycklig konstant ($\alpha \neq -1$). Dessutom gäller t ex ($\alpha \neq 0$)

$$\int e^{\alpha x} dx = \alpha^{-1} e^{\alpha x} + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

En användbar regel:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + C.$$

Teknik: partiell integration

Det är i allmänhet en svår uppgift att fiska fram en primitiv funktion till en given funktion. Några allmänna tekniker finns dock till vår hjälp.

PARTIELL INTEGRATION: Om $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$, så gäller att

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx.$$

Partiell integrations-formeln följer ur produktregeln för derivatan.

EXEMPEL: Beräkna

$$\int xe^x\,dx, \quad \int \ln x dx.$$

Teknik: variabelsubstitution

VARIABELSUBSTITUTION: Om f har en primitiv funktion F och g är deriverbar, så gäller att

$$\int f(g(t))g'(t)\,dt = F(g(t)) + C.$$

Denna regel för integration följer ur kedjeregeln för derivatan.

EXEMPEL: Bestäm

$$\int \sqrt{1-x^2}dx$$

med hjälp av variabelbytet $x = \sin t$.

Rationella funktioner: partialbråksuppdelning

Antag att vi vill finna en primitiv funktion till $f(x)$, om f är rationell, dvs

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)},$$

där g och h är polynom. Vi skriver först med hjälp av polynomdivision

$$f(x) = q(x) + \frac{r(x)}{h(x)},$$

där q och r är polynom, och r har grad $r <$ grad h. Vi måste nu betrakta kvoten r/h.

Rationella funktioner: partialbråksuppdelning (2)

STEG 1: FAKTORISERA NÄMNAREN: Vi faktoriserar nämnaren (vi kan anta att högstagradskoefficienten är 1):

$$h(x) = (x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n),$$

där $n = \text{grad}\, h$ samt $z_1, \ldots, z_n$ är h:s alla komplexa rötter. Vissa av dessa rötter kan sammanfalla. Dessutom – eftersom h antas vara ett reellt polynom – är rötterna antingen reella eller är komplexkonjugerade par.

Rationella funktioner: partialbråksuppdelning (3)

STEG 2: Vi hoppas nu att

$$\frac{r(x)}{h(x)} = \frac{c_1}{x - z_1} + \ldots + \frac{c_1}{x - z_n},$$

där konstanterna $c_1, \ldots, c_n$ kan vara komplexa. Om alla rötterna $z_1, \ldots, z_n$ är olika är detta sant. Om vissa av rötterna sammanfaller, måste vi ta till nya termer. T ex om z_1 förekommer dubbelt måste vi lägga till en term av typen

$$\frac{d_1}{(x - z_1)^2}.$$

Rationella funktioner: partialbråksuppdelning (4)

EXEMPEL: Partialbråksuppdela

$$\frac{x+1}{(x+2)(x+3)}, \quad \frac{2x+5}{(x+2)^2(x+3)}, \quad \frac{x+5}{x^2(x^2+1)}.$$

Lite teknik

Låt

$$I_n(x) = \int \frac{dx}{(x^2+a)^n}.$$

Då visar man m h a partiell integration att

$$I_n(x) = \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2nI_n(x) - 2anI_{n+1}(x).$$

$I_1(x)$ är lätt att få fram; de andra kommer iterativt ur ovanstående.