

F23: Separabla differentialekvationer.

18 november 2008

Separabla differentialekvationer

DEFINITION: En differentialekvation av första ordningen sägs vara **separabel** om den kan skrivas på formen

$$(1) \quad g(y) y' = h(x),$$

där g och h är givna kontinuerliga funktioner. Låt G vara en primitiv funktion till g , och H vara en primitiv funktion till h . Enligt kedjeregeln är (1) samma som

$$\frac{d}{dx} G(y(x)) = \frac{d}{dx} H(x),$$

vilket kan gälla bara om

$$G(y(x)) = H(x) + C,$$

där C är en konstant. Denna ekvation löser vi genom inversfunktion:

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + C).$$

Exempel på separabla ekvationer

EXEMPEL. Lös ekvationen

$$\frac{dy}{dx} - 2xy^2 = 0.$$

EXEMPEL: Lös ekvationen (från kemin)

$$\frac{dy}{dx} = k(a - y)(b - y),$$

där k, a, b är positiva konstanter, med $a < b$. Den kemiskt relevanta lösningen har $a < y(x) < b$.

VARIABELBYTE. Lös ekvationen

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{2y}, \quad x > 0,$$

genom substitutionen

$$y = xz.$$

EXEMPEL. Bestäm alla kontinuerliga funktioner $y(x)$ sådana att

$$y(x) = 1 + \int_0^x t y(t) dt, \quad x \geq 0.$$