F24: Linjära differentialekvationer.

19 november 2008

Allmänna linjära differentialekvationer

DEFINITION: En differentialekvation av ordning n på formen

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)\, y = f(x)$$

där $a_{n-1}, \ldots, a_0, f$ är givna kontinuerliga funktioner, kallas **linjär**.

EXEMPEL. Om $n = 1$ blir den allmänna linjära differentialekvationen

$$y' + a_0(x)\, y = f(x),$$

en ekvation vi redan stött på. Om $n = 2$, blir den allmänna linjära ekvationen

$$y'' + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = f(x).$$

Allmänna linjära differentialekvationer (2)

LINJÄR DIFFERENTIALOPERATOR. Vi definierar

$$\mathcal{L}[y] = y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)\, y$$

vilket vi tänker på som en transformation som skickar en funktion på en annan. Man kollar att $\mathcal{L}$ är en linär transformation, dvs fungerar precis som kvadratiska matriser agerar på kolonn-vektorer i linjär algebra.

LÖSNINGSSTRUKTUREN. Ekvationen

$$\mathcal{L}[y] = f$$

har allmän lösning

$$y = y_p + y_h,$$

där y_p är en speciell lösning (partikulärlösning) och y_h är den allmänna lösningen till det homogena problemet

$$\mathcal{L}[y] = 0.$$

EKVATIONEN MED KONSTANTA KOEFFICIENTER. ORDNING 2. Vi betraktar ekvationen

$$(KK-H) \qquad y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0,$$

där a_1 och a_0 är konstanta. Denna löser genom att gissa en exponentiallösning

$$y = e^{rx},$$

som ger

$$y' = r\, e^{rx}, \qquad y'' = r^2\, e^{rx},$$

och om differentialekvationen ska vara uppfylld måste

$$r^2\, e^{rx} + a_1 r\, e^{rx} + a_0\, e^{rx} = 0,$$

dvs

$$(KE) \qquad r^2 + a_1 r + a_0 = 0.$$

(KE) kallas för den **karakteristiska ekvationen**.

Homogena ekvationen med konstanta koefficienter (2)

SATS. Om (KE) har två olika reella rötter r_1, r_2, är den allmänna lösningen till (KK-H) av formen

$$y = C_1\, e^{r_1 x} + C_2\, e^{r_2 x},$$

där C_1, C_2 r̈ två godtyckliga reella konstanter. Om (KE) har en dubbelrot $r_1 = r_2$, är den allmänna lösningen till (KK-H) av formen

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{r_1 x}.$$

Om (KE) saknar reella rötter, finns istället två komplexa rötter

$$r_1 = \alpha + i\beta, \qquad r_1 = \alpha - i\beta,$$

där $\beta > 0$. Då är den allmänna lösningen till (KK-H) av formen

$$y = e^{\alpha x}\big(A \cos \beta x + B \sin \beta x\big).$$

Partikulärlösningar

Det är viktigt att kunna få tag i partikulärlösningar till

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x).$$

Detta kan göras effektivt om $f(x)$ själv är en homogen lösning till en homogen linär DE, dvs en summa av uttryck av formen

$$\mathrm{p(x)}\, e^{sx},$$

där s är reellt eller komplext, och p är ett polynom. Se läroboken för detaljer.