

# F27: Tillämpningar av Taylors formel

2 december 2008

# Entydighet i Taylorutvecklingar

Antag att  $f(x)$  har utvecklingen

$$(1) \quad f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + x^{n+1}B(x),$$

där funktionen  $B(x)$  är begränsad runt  $x = 0$ . Kan vi då sluta oss till att

$$(2) \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n?$$

Rimligtvis bör vi här anta att  $f$  är kontinuerligt deriverbar tillräckligt många gånger. Det visar sig vara så att (2) gäller om  $f$ 's derivator upp till och med ordning  $n + 1$  alla är kontinuerliga.

# Entydighet i Taylorutvecklingar

Eftersom  $f(x)$  antas så snäll så har funktionen en Taylorutveckling kring  $x = 0$ :

$$(3) \quad f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x),$$

där resttermen har formen

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Vi kombinerar (1) och (3):

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + x^{n+1}B(x) \\ = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x). \end{aligned}$$

# Entydighet i Taylorutvecklingar

Vi omgrupperar, och får

$$\begin{aligned} a_0 - f(0) + (a_1 - f'(0))x + \left(a_2 - \frac{f''(0)}{2!}\right)x^2 + \dots \\ + \left(a_n - \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right)x^n = R_{n+1}(x) - x^{n+1}B(x). \end{aligned}$$

Eftersom  $f^{(n+1)}$  är kontinuerlig, gäller att för  $x$  nära 0 har vi

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} = x^{n+1}B_1(x),$$

där  $B_1(x)$  är begränsad nära  $x = 0$ . Dvs

$$R_{n+1}(x) - x^{n+1}B(x) = x^{n+1}B_2(x),$$

för någon annan begränsad funktion  $B_2(x)$ .

# Entydighet i Taylorutvecklingar

Vi har alltså

$$\begin{aligned} a_0 - f(0) + (a_1 - f'(0))x + \left(a_2 - \frac{f''(0)}{2!}\right)x^2 + \dots \\ + \left(a_n - \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right)x^n = x^{n+1}B_2(x). \end{aligned}$$

Stoppar vi in  $x = 0$ , finner vi att  $a_0 = f(0)$ . Delar vi sedan den återstående identiteten med  $x$ , får vi

$$\begin{aligned} a_1 - f'(0) + \left(a_2 - \frac{f''(0)}{2!}\right)x + \dots \\ + \left(a_n - \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right)x^{n-1} = x^n B_2(x). \end{aligned}$$

# Entydighet i Taylorutvecklingar

Stoppar vi igen in  $x = 0$ , finner vi att  $a_1 = f'(0)$ . Fortsätter vi så här får vi att

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Dvs vi har visat entydigheten.

# Tillämpningar

Vi betraktar

$$f(x) = e^{\sin x},$$

och vill Taylorutveckla kring  $x = 0$  upp till ordning, säg, 4. Vi har att

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^5 B_1(x),$$

och att

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + y^5 B_2(y),$$

där  $B_1(x)$  och  $B_2(y)$  är begränsade kring  $x = 0$  och  $y = 0$ .

Eftersom

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= x^2 - \frac{2}{3!}x^4 + x^5 B_3(x), & \sin^3 x &= x^3 + x^5 B_4(x), \\ \sin^4 x &= x^4 + x^5 B_5(x),\end{aligned}$$

med  $B_3(x)$ ,  $B_4(x)$ , och  $B_5(x)$  likaså begränsade, så blir

$$e^{\sin x} = 1 + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{1}{3!}x^4 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + x^5 B_6(x),$$

vilket vi snyggar till lite:

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{8}x^4 + x^5 B_6(x),$$

Detta är alltså den entydiga Taylorutvecklingen av grad 4.

# Tillämpningar av Taylorutveckling

Med hjälp av Taylorutveckling kan vi lätt beräkna gränsvärden som

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}.$$

Eftersom

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^5 B(x),$$

där  $B(x)$  är begränsad nära  $x = 0$ , får vi att

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{-\frac{x^3}{3!} + x^5 B(x)}{x^3} = -\frac{1}{3!} + x^2 B(x) \rightarrow -\frac{1}{6}$$

då  $x \rightarrow 0$ . (instängning!)

# L'Hospitals regel

Antag att vi vill beräkna ett gränsvärde av typen

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

vilket är av typen  $\left[\frac{0}{0}\right]$ , dvs både  $f(x) \rightarrow 0$  och  $g(x) \rightarrow 0$  då  $x \rightarrow 0$ .  
L'Hospitals regel säger att i så fall så gäller – i fall funktionerna är kontinuerligt deriverbara nära  $x = 0$  – att

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Vi kan visa detta lätt m h a Taylorutveckling åtminstone ifall att  $g'(0) \neq 0$ :

# l'Hospitals regel

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(0) + f'(0)x + x^2 B_1(x)}{g(0) + g'(0)x + x^2 B_2(x)} = \frac{f'(0)x + x^2 B_1(x)}{g'(0)x + x^2 B_2(x)} \\ &= \frac{f'(0) + x B_1(x)}{g'(0) + x B_2(x)} \rightarrow \frac{f'(0)}{g'(0)}.\end{aligned}$$

Om även  $\lim f'/g'$  skulle vara av typen  $\left[\frac{0}{0}\right]$ , så tillåter den generella l'Hospitals regel oss att fortsätta derivera upp och nere.