

F30: Kurssammanfattning Diffint

10 december 2008

Funktioner definieras abstrakt som en sorts “maskin” som tar ett input och producerar ett output; maskinen antas förutsägbar, så att om vi kör samma input igen får vi återigen samma output. Jag brukar ta som exempel en apelsinjosfabrik: där stoppar man in apelsiner, och ut kommer färdig jos. Tar vi t ex blodapelsiner får vi motsvarande jos. Men försöker vi stoppa in äpplen går maskinen sönder. Man måste nämligen stoppa in apelsiner, inget annat. En funktion har en definitionsmängd, i detta exempel alla möjliga sorters apelsiner. Värdeområde har den också, nämligen alla möjliga olika sorters jos vi kan få.

Inverterbara (invertibla) funktioner

Om varje jossort bara kan komma från ett slags apelsiner, säger vi att funktionen är inverterbar. Mer allmänt: En funktion f är **inverterbar (invertibel)** om varje värde bara tas en gång, dvs om

$$f(x) = f(y) \implies x = y.$$

Observera att detta är väldigt likt villkoret att f är en funktion, vilket kan skrivas

$$x = y \implies f(x) = f(y).$$

Inversfunktioner

En jämförelse av de två villkoren gör att vi inser att om f är inverterbar så finns en funktion f^{-1} – som vi kallar inversfunktionen – så att

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad f(f^{-1}(y)) = y,$$

för alla x ur definitionsmängden och alla y ur värdemängden. Detta skriver vi formellt som att

$$f^{-1} \circ f(x) = x, \quad f \circ f^{-1}(y) = y,$$

med konventionen att skriva

$$f \circ g(x) = f(g(x)).$$

Exempel på inversfunktioner

Om vi betraktar funktionen

$$f(x) = x^n$$

för ett heltal n och alla reella x så blir funktionen inverterbar bara för **udda** n . Vi skriver då inversfunktionen

$$y = f(x) = x^n \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = y^{1/n}.$$

För $n = 0$ har vi

$$f(x) = x^0 = 1$$

mer eller mindre per definition, så i det fallet blir funktionen ej inverterbar. Men om $n \neq 0$ är jämnt, kan vi bilda restriktionen av funktionen till **positiva** x , och i så fall kan vi bilda en invers:

$$y = f(x) = x^n \ (x > 0) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = y^{1/n} \ (y > 0).$$

Polynom och rötter

Ett polynom $p(x)$ kan skrivas som

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

där vi kan anta att $a_n \neq 0$. Heltalet n kallas polynomets **grad**. Konstanta polynom har grad 0, räta linjer med nollskild lutning har grad 1. Talen $a_0, a_1, \dots, a_n$ kallas **koefficienter**. Om dessa är reella har vi ett **reellt** polynom, om de är komplexa har vi ett **komplext polynom**. Alla tal x sådana att

$$p(x) = 0$$

kallas **rötter** eller **nollställen**. En del rötter är reella, andra kan vara komplexa.

Ett viktigt resultat är följande.

SATS. *Ett komplext polynom p av grad n har n stycken komplexa rötter (varav en del kan sammanfalla i t ex dubbel- eller trippelrötter).*

Beviset av denna sats faller utanför denna kurs. Via elementär polynomdivision får vi följande följsats.

FAKTORISERINGSSATS. *Varje komplext polynom $p(x)$ av grad n kan skrivas*

$$p(x) = a_n \prod_{k=1}^n (x - z_k) = a_n (x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n).$$

Härvid är $z_1, \dots, z_n$ polynomets alla komplexa rötter.

Obervera produktnotationen ovan.

Reella polynom

Om vi har ett reellt polynom $p(x)$ kan man visa att om

$$z_k = x_k + iy_k$$

är en komplex rot, så är även det konjugerade talet

$$\bar{z}_k = x_k - iy_k$$

en rot (detta kan sägas bero på att talen i och $-i$ har samma egenskaper algebraiskt). Om z_k är reellt, dvs $y_k = 0$, ger detta ingen extra information. Men om z_k är äkta komplext, dvs icke-reellt, får vi faktiskt viktig information. Vi får i så fall den reella faktorn

$$\begin{aligned}(x - z_k)(x - \bar{z}_k) &= x^2 - (z_k + \bar{z}_k)x + z_k\bar{z}_k \\ &= x^2 - 2x_kx + x_k^2 + y_k^2\end{aligned}$$

i faktoriseringen av polynomet $p(x)$.

REELL FAKTORISERINGSSATS. *Ett reellt polynom kan faktoriseras som produkten av*

1. *en konstant,*
2. *enkla faktorer av typen $x - z_k$ med z_k reellt, samt*
3. *andragradsuttryck av typen ovan.*

Rationella funktioner – polynomdivision

En funktion av typen

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

där p, q är polynom ($q(x)$ får ej vara $= 0$ överallt), sägs vara **rationell**. Observera analogin med rationella tal. Om p har samma grad som q , eller ännu större, kan vi använda polynomdivision för att skriva om

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = P(x) + \frac{p_1(x)}{q(x)},$$

där nu p_1 har lägre grad än q , och $P(x)$ är ett polynom.

Rationella funktioner – partialbråksuppdelning

Vi faktorerar q i första- och andrags-faktorer. Vi förenklar för oss och **antar att inga sådana faktorer är dubbla**. I så fall kan vi skriva $p_1(x)/q(x)$ som en summa av termer av typen

$$\frac{c_k}{x - z_k},$$

där z_k är en reell rot till $q(x)$ och c_k är en reell konstant, samt termer av typen

$$\frac{c_k x + d_k}{x^2 - 2x_k x + x_k^2 + y_k^2},$$

om $z_k = x_k + iy_k$ är en icke-reell rot till $p(x)$, och c_k, d_k är reella konstanter.

Låt **binomialkoefficienten** $\binom{n}{k}$ definieras av

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

där i allmänhet **m-fakultet** definieras av

$$m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1)m,$$

för heltal m, n, k . Då har vi

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

En funktion $f(x)$ sägs vara **kontinuerlig i** $x = x_0$ om

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

En funktion $f(x)$ sägs vara **kontinuerlig på ett intervall** om den är kontinuerlig i varje punkt på intervallet.

OBS: De flesta funktioner vi hittar på – utan att sy ihop olika funktioner eller dela med noll – är kontinuerliga.

Ett **kompakt intervall** är ett intervall $[a, b]$ där a, b är reella och $a \leq b$.

SATS. *En kontinuerlig funktion avbildar ett kompakt intervall på ett kompakt intervall. Speciellt antas max och min, samt alla värden mellan dessa.*

Derivatans definition

Derivat av funktionen $f(x)$ i punkten $x = x_0$ definieras som

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Grafiskt motsvarar detta tangentens riktningskoefficient. Om x är tid, och $f(x)$ en partikels position vid tiden x , motsvarar $f'(x_0)$ hastigheten i $x = x_0$. Vi skriver även

$$\frac{df}{dx}(x) = f'(x).$$

Funktionen $f(x)$ ger alltså upphov till en avledd funktion $f'(x)$ (jfr tyskans Ableitung och franskans dérivée). Denna ger i sin tur upphov till ytterligare en avledd funktion $f''(x)$, andraderivat. Vi får sedan tredjederivat $f'''(x)$, mer allmänt n -te derivatan $f^{(n)}(x)$, och vi skriver ibland

$$\frac{d^n f}{dx^n}(x) = f^{(n)}(x).$$

Deriveringsregler

1. $(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x)$, om $f(x), g(x)$ är funktioner och a, b konstanter.
2. Produktregeln: $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
3. Kvotregeln: $(f(x)/g(x))' = (f'(x)g(x) - f(x)g'(x))/(g(x))^2$.
4. Kedjeregeln: $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$.

Extrempunkter

En **lokal extrempunkt** är en punkt där vi har ett lokalt max eller min. En punkt är **inre** om den inte är randpunkt till vårt givna intervall där funktionen är definierad.

SATS. Om funktionen $f(x)$ har ett extremvärde i en inre punkt x_0 , så gäller att $f'(x_0) = 0$.

Beviset bygger på att vi använder derivatans definition.

OBS. Omvändningen är osann i allmänhet.

Punkter x_0 där $f'(x_0) = 0$ kallas **stationära**.

Medelvärdessatsen

Antag att funktionen $f(x)$ är kontinuerlig på det slutna intervallet $[a, b]$, och deriverbar i det öppna intervallet $]a, b[$.

MEDELVÄRDESSATSEN. *Det finns minst en punkt $\xi \in]a, b[$ sådan att*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Beviset bygger på att

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

uttrycker lutningen av det linjesegment som förbinder grafens ändpunkter. Man subtraherar den funktion som uttrycker linjesegmentet, och differensen blir noll i båda ändpunkter. Om inte differensen är identiskt noll måste den ha en extrempunkt $x = \xi$. Detta är den sökta punkten.

Kurvritning. Vi använder t ex derivatan för att hitta max eller min, eller mer generellt vid kurvritning. Teckenstudium av förstaderivatan är viktigt för att avgöra om funktionen växer eller avtar. Teoretiskt baserar sig detta på **Medelvärdessatsen**. Dessutom behöver man tänka på eventuella **asymptoter**. En asymptot är en rät linje som kurvan närmar sig mot oändligheten. Det finns horisontella, sneda, och vertikala asymptoter. Andraderivatans geometriska betydelse är att dess tecken avgör om funktionen är **konvex** eller **konkav**.

Primitiva funktioner

Givet en funktion $f(x)$, säger vi att en funktion $F(x)$ är en **primitiv** till $f(x)$ om

$$F'(x) = f(x), \quad x \in I,$$

där I är det intervall vi jobbar på. Man vet att på ett sådant intervall I är de enda lösningen till

$$G'(x) = 0, \quad x \in I$$

de konstanta funktionerna. Detta innebär att om $F(x)$ är en primitiv till $f(x)$, så är alla primitiver på I till $f(x)$ av formen

$$F(x) + C,$$

där C är en konstant.

Primitiva funktioner

Vi låter

$$\int f(x) dx$$

beteckna den allmänna primitiva funktionen till $f(x)$, och skriver alltså

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Text har vi

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

om $n \neq -1$.

Partiell integration kommer ur **produktregeln** för derivatan.
Formeln lyder

$$\int f(x)g(x) dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx,$$

där $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$.

Variabelsubstitution kommer ur kedjeregeln för derivatan. Formeln lyder

$$\left[\int f(x) dx \right]_{x=x(t)} = \int f(x(t)) x'(t) dt.$$

Om man har en klurig integral krävs ofta en kombination av metoder, som **variabelsubstitution** (kräver ofta ett listigt val av substitution) och **partiell integration** (kräver ett listigt val av produktuppdelning av integranden). Dessutom kan man i fråga om rationella funktioner ha glädje av **partialbråksuppdelning**, vilket diskuterats tidigare.

Riemannintegralen

Riemannintegralen skapades i ett systematiskt försök på 1800-talet att rigoröst få fram de resultat redan Isaac Newton härledde (mer intuitivt) 1666. Den kan jämföras med den lite senare och ännu bättre **Lebesgueintegralen**, vilken inte ingår i denna kurs.

Riemannintegralen försöker lösa problemet att beräkna arean under kurvan (med tecken!) på ett intervall $[a, b]$ med hjälp av s k **översummor** och **undersummor**. Om översumman och undersumman konvergerar mot samma tal då intervallindelningen görs **finare**, så sägs funktionen (vi kallar den $f(x)$) vara **Riemannintegrerbar**, och gränsvärdet betecknas med

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Om man istället för att välja max och min av funktionen på varje delintervall väljer ett (valfritt) funktionsvärde på delintervallet kallar man motsvarande summa för en **Riemannsumma**. Då gäller enligt en sats att om funktionen är Riemannintegrabel (integrabel=integrerbar) så kommer Riemannsumman att konvergera mot integralen om förfiningen (längden på största delintervallet) går mot noll, förutsatt att funktionen är Riemannintegrabel.

SATS. *Varje kontinuerlig funktion på $[a, b]$ är Riemannintegrerbar på $[a, b]$.*

Integralkalkylens medelvärdessats

Antag $f(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$.

MEDELVÄRDESSATSEN. *Det finns en punkt $\xi \in [a, b]$ sådan att*

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a).$$

Med andra ord antar funktionen sitt medelvärde på intervallet. Det beror på **satsen om mellanliggande värden** och förstås på att funktionen är kontinuerlig. Medelvärdessatsen är viktig för beviset av Analysens Huvudsats (**Integralkalkylens Huvudsats**).

Integralkalkylens huvudsats

Vi antar att $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$.

INTEGRALKALKYLENS HUVUDSATS. *Funktionen*

$$S(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b],$$

är en primitiv till $f(x)$, dvs

$$S'(x) = f(x), \quad x \in]a, b[.$$

OBS. $S'(x) = f(x)$ gäller även i ändpunkterna a, b om vi tar derivatan i höger- eller vänster-mening, respektive.

Vi antar att $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$.

SATS. Om $F(x)$ är en primitiv till $f(x)$ så gäller

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Denna sats får vi lätt ur Integralkalkylens Huvudsats.

Generaliserade integraler

Ibland vill vi kunna integrera en obegränsad funktion på $[a, b]$, eller integrera över ett obegränsat intervall som t ex $[0, +\infty[$. Det är inte möjligt direkt med Riemannintegralen, eftersom över- eller undersummor blir oändliga. Detta problem löser vi genom att integrera i vanlig mening över ett lite mindre intervall, och sedan låta intervallgränserna gå mot de önskade. Resultatet blir en **generaliserad Riemannintegral**.

Exempel.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_1^T \frac{dt}{t^2} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{t} \right]_1^T = \lim_{T \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{T} = 1.$$

Tillämpningar av integraler

Vi använder integraler för att beräkna volymer och areor. T ex har vi **skivformeln** för att beräkna volymer. Även **kurvors längd**, och **masscentra** har berörts. Dessutom kan generaliserade integraler jämföras med serier för att avgöra konvergens hos serier (**Cauchys integralkriterium**).

Differentialekvationer

En (ordinär) differentialekvation av ordning n kan skrivas

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Ofta föredrar man att lösa ut $y^{(n)}$, och skriva på formen

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Om ordningen $n = 1$ skriver vi t ex

$$y' = f(x, y).$$

Ekvationen är **autonom** om x -beroende saknas, dvs t ex om $n = 1$ så

$$y' = f(y).$$

Differentialekvationer av ordning 1: riktningsfält

Vi betraktar differentialekvationen

$$y' = f(x, y),$$

och ritar upp för varje punkt (x, y) i planet ett kort linjesegment med riktningskoefficient $f(x, y)$. Vi får ett **riktningsfält**. Vi anar intuitivt att lösningarna borde vara entydigt bestämda av begynnelsedata av typen

$$y(x_0) = y_0.$$

Autonoma differentialekvationer av ordning 1: fasporträtt

Vi betraktar differentialekvationen

$$y' = f(y),$$

där f antas kontinuerligt deriverbar. Alla punkter y så att $f(y) = 0$ kallar vi **stationära punkter**. Om y_0 är en sådan stationär punkt så är

$$y(x) = y_0$$

en lösning till differentialekvationen. Antag nu att det bara finns ändligt många stationära punkter; mellan två efterföljande sådana har $f(y)$ ett bestämt tecken. Om $f(y)$ är positiv, ritar vi en pil åt höger; om $f(y)$ är negativ, ritar vi en pil åt vänster. Motsvarande görs även längst till vänster och längst till höger. Vi har ritat ett endimensionellt **fasporträtt**. Lösningarna kommer med tiden (x tänks nu som en tidskoordinat) att följa pilarna.

Separabla differentialekvationer

Vi vill lösa differentialekvationen

$$y' = f(x)g(y).$$

Vi skriver om den som

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx.$$

Slutligen integrerar vi på bägge sidor:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx.$$

Detta ger en ekvation som involverar en integrationskonstant som fri parameter.

Linjära differentialekvationer

En allmän homogen differentialekvation av ordning n skriver vi som

$$\mathcal{L}[y](x) = 0,$$

där

$$\mathcal{L}[y](x) = a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_0(x) y$$

är en **linjär differentialoperator**. Detta innebär att

$$\mathcal{L}[y_1 + y_2] = \mathcal{L}[y_1] + \mathcal{L}[y_2]$$

samt att

$$\mathcal{L}[\alpha y] = \alpha \mathcal{L}[y]$$

för konstanter α . Den allmänna (homogena) lösningen involverar n st fria konstanter $C_1, \dots, C_n$ (föresatt att vi antar $a_n(x) \neq 0$) och kan skrivas

$$y(x) = y_h(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

där $y_1, \dots, y_n$ är en bas av lösningar.

Linjära differentialekvationer: inhomogena

Den allmänna lösningen till det inhomogena problemet

$$\mathcal{L}[y](x) = g(x)$$

kan skrivas

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x),$$

där $y_p(x)$ är en partikulärlösning, och $y_h(x)$ är den allmänna homogena lösningen.

Linjära differentialekvationer av ordning 1

Vi har

$$y' + a(x)y = g(x).$$

Ekvationen löses med s k **integrerande faktor**,

$$(e^{A(x)}y)' = e^{A(x)}g(x),$$

vilken löses med integration. Här är $A(x)$ en primitiv till $a(x)$.

Linjära DE av ordning 2, konstanta koeff

Vi betraktar det homogena problemet

$$y'' + a_1y' + a_0y = 0,$$

och gissar en exponentiallösning

$$y(x) = e^{rx}.$$

Vi får den **karakteriska ekvationen**

$$r^2 + a_1r + a_0 = 0,$$

vilken har två rötter i allmänhet. Beroende på hur rötterna hamnar får vi olika beteende hos lösningarna.

I samband med det inhomogena problemet

$$y'' + a_1y' + a_0y = g(x),$$

återstår att bestämma en partikulärlösning $y_p(x)$. Om $g(x)$ är en summa av termer av typen exponentialfunktion gånger polynom, visar det sig att en lösning y_p kan finnas av samma typ.

Taylor's formel

Se anteckningar om Taylor's formel från F25-F27.