

# F7: Introduktion till derivatan

23 september 2008

**FÖRÄNDRING:** Om  $f(x)$  är en funktion, kan vi tänka på den som en storhet som ändras med variabeln  $x$  (som t ex kan beteckna tiden). Det är naturligt att försöka studera storhetens förändring då  $x$  flyttas lite grand. Från  $x_0$  till  $x_0 + h$  blir förändringen

$$(1) \quad f(x_0 + h) - f(x_0).$$

Om  $f(x)$  är kontinuerlig kommer uttrycket (1) att gå mot 0 då  $h \rightarrow 0$ , så det gränsvärdet är inte intressant. För att få ett uttryck med bättre chans att ha ett intressant gränsvärde bildar vi istället

$$(2) \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

**DEFINITION:** Derivatan till  $f(x)$  i punkten  $x = x_0$  är gränsvärdet

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

**EXEMPEL:** Beräkna  $f'(x_0)$  för (a)  $f(x) = x^2$ , (b)  $f(x) = \sqrt{x}$ , (c)  $f(x) = e^x$ , (d)  $f(x) = \ln x$ .

**DEFINITION:** Om gränsvärdet  $f'(x_0)$  finns säger vi att funktionen  $f(x)$  är deriverbar i  $x = x_0$ . Om funktionen är deriverbar i varje punkt på ett intervall  $I$ , säger vi att funktionen är deriverbar på  $I$ .

**SATS 1:** En deriverbar funktion är kontinuerlig.

# Räkningregler för derivatan

**SATS 2:** Låt  $f$  och  $g$  vara två deriverbara funktioner, och  $\alpha$  en konstant. Då gäller att  $\alpha f$ ,  $f + g$ ,  $fg$ , och  $f/g$  är deriverbara i sina definitionsmängder, och dessutom har vi:

$$(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x),$$

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x),$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

$$(f/g)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

**SATS 3:** Om  $g$  är deriverbar i punkten  $x_0$  och  $f(t)$  deriverbar i punkten  $t = g(x_0)$ , så är funktionen  $h(x) = f(g(x))$  deriverbar i  $x = x_0$ . Dessutom gäller att

$$h'(x) = f'(g(x)) g'(x).$$

**EXEMPEL:** Derivera funktionen  $f(x) = (x^3 + x)^{100}$ .

**Invers funktion:** erinrar oss att

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

om  $f$  är inverterbar.

**SATS 4:** Om  $f$  är inverterbar (med  $f^{-1}$  kontinuerlig) och om  $f$  är deriverbar i  $x$  med  $f'(x) \neq 0$ , så är  $f^{-1}$  deriverbar i  $y = f(x)$ , och dessutom gäller att

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$