

KTH, Matematik

Lappskrivning nummer 3 till kursen Linjär algebra, SF1604, för F1 den 7/11 2008, 10:15-10:55.

Namn/person-nummer:

Resultat:

Godkänd på uppgift 1 ger 1 bonus poäng till Del I av tentamen och omtentamen. Godkänd på uppgift 2 ger 1 bonus poäng till Del II av tentamen och omtentamen.

OBS Svaret skall motiveras och lösningen skrivas, ordentligt och klart, på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Låt $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ vara den linjära avbildning definierad av $F(x, y, z) = (2x + y, x - z, z)_S$ (med avseende till standard basen $S = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$). Bestäm om det finns en bas B till $\mathbf{R}^3$ sådan att:

$$[F]_B^S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

($[F]_B^S$ betecknar matrisen till F , med avseende till basen B och S , d.v.s. $[F]_B^S(v)_B = (F(v))_S$.)

Lösning a): Eftersom är

$$[F]_S^S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \det([F]_S^S) = 1$$

så är $R(F) = C([F]_S^S) = \mathbf{R}^3$. Men om det fanns en bas sådan att

$$[F]_B^S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \det([F]_B^S) = 0$$

så skulle detta betyda att $\dim(R(F)) < 3$. Såär svaret nej.

Lösning b): Låt $B = (v_1, v_2, v_3)$, $v_i = (x_i, y_i, z_i)_S$, $i = 1, 2, 3$, så att

$$[F]_B^S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Detta betyder att kolonnerna skulle motsvara $T(v_i)_S$, d.v.s :

$$\begin{cases} T(v_1) &= (2x_1 + y_1, x_1 - z_1, z_1)_S &= (1, 2, 1) \\ T(v_2) &= (2x_2 + y_2, x_2 - z_2, z_2)_S &= (0, -1, 2) \\ T(v_3) &= (2x_3 + y_3, x_3 - z_3, z_3)_S &= (1, 1, 3) \end{cases}$$

Vi har då 3 system,

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 &= 1 \\ x_1 &- z_1 = 2 \\ &z_1 = 1 \end{cases}, \begin{cases} 2x_2 + y_2 &= 0 \\ x_2 &- z_2 = -1 \\ &z_2 = 2 \end{cases}, \begin{cases} 2x_3 + y_3 &= 1 \\ x_3 &- z_3 = 1 \\ &z_3 = 3 \end{cases}$$

som ger $v_1 = (3, -5, 1)$, $v_2 = (1, -2, 2)$, $v_3 = (4, -7, 3)$.

Men $v_1 = (3, -5, 1)$, $v_2 = (1, -2, 2)$, $v_3 = (4, -7, 3)$ är linjärt beroende eftersom

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -5 & -2 & -7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

Detta säger att vektorerna kan inte utgöra en bas.