KTH Matematik
Olle Stormark

Lösning till kontrollskrivning 1A

i SF1626 Flervariabelanalys för E, vt 2008.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Funktionen
$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$
är snäll och väluppfostrad då $(x, y) \neq (0, 0)$. Kan man definiera $f(x, y)$ i punkten $(0, 0)$ så att $f(x, y)$ blir kontinuerlig där? I så fall, förklara HUR!

   Lösning: $(x, y) \to (0, 0) \iff t = x^2 + y^2 \to 0 \Longrightarrow$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$
Så $f(x, y) \to 1$ då $(x, y) \to (0, 0)$ oavsett längs vilken väg detta sker. Detta betyder att $f(x, y)$ blir kontinuerlig i $(0, 0)$ om man sätter $f(0, 0) = 1$.

2. Låt $w = f(x, y, z) = xy^2z^3$, och sätt sedan $x = \cos t$, $y = e^t$ och $z = \ln(t + 2)$ så att w blir en funktion av t. Beräkna
$$\frac{dw}{dt}(0).$$

Lösning: Kedjeregeln ger att

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}\\ &= y^2z^3\cdot(-\sin t)+2xyz^3\cdot e^t+3xy^2z^2\cdot\frac{1}{t+2}.\end{aligned}$$

Då $t=0$ är $x=1$, $y=1$ och $z=\ln 2$, varför

$$\frac{dw}{dt}(0)=0+2\cdot(\ln 2)^3+\frac{3}{2}\cdot(\ln 2)^2.$$

3. Låt funktionen $z=f(x,y)$ vara given. Genom att införa polära koordinater definierade av $x=r\cos\phi$ och $y=r\sin\phi$ kan z även uppfattas som en funktion av r och ϕ. Visa att

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2.$$

Lösning:

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos\phi+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\sin\phi \quad \text{och}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \phi}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \phi}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \phi}=-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot r\sin\phi+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot r\cos\phi \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\cos^2\phi+2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\cos\phi\sin\phi+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\sin^2\phi$$

$$+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\sin^2\phi-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\cos\phi\sin\phi+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\cos^2\phi$$

$$=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

KTH Matematik
Olle Stormark

Lösning till kontrollskrivning 1B

i SF1626 Flervariabelanalys för E, vt 2008.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Funktionen
$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$
är snäll och väluppfostrad då $(x,y) \neq (0,0)$, och är uppenbarligen lika med 0 längs koordinataxlarna. Blir $f(x,y)$ kontinuerlig om man sätter $f(0,0) = 0$? FÖRKLARA!

   Lösning: Längs linjen $y = x$ till exempel är $f = 1/2$, så $f(x,y) \to 1/2 \neq 0$ då $(x,y) \to (0,0)$ längs denna linje. Så $f(x,y)$ kan OMÖJLIGT göras kontinuerlig i $(0,0)$.

2. Låt $z = x^2y$, och sätt $x = u^2+v^2$, $y = \cos(uv)$, så att z blir en funktion av u och v. Beräkna $\partial z/\partial u$ som en funktion av u och v.

   Lösning:
$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = 2xy\cdot 2u + x^2\cdot(-\sin(uv)\cdot v)\\ &= 2(u^2+v^2)\cdot\cos(uv)\cdot 2u - (u^2+v^2)^2\cdot v\cdot\sin(uv)\\ &= 4u\cdot(u^2+v^2)\cdot\cos(uv) - v\cdot(u^2+v^2)^2\cdot\sin(uv).\end{aligned}$$

3. Linjen $(x, y, z) = t\cdot(1, 1, 1)$ (där $-\infty < t < \infty$) skär ellipsoiden $x^2+y^2+2z^2 = 1$ i en punkt $\boldsymbol{p}$ i första oktanten $\{x > 0, y > 0, z > 0\}$. Bestäm den minsta vinkeln mellan linjen och ellipsens utåtriktade normal i punkten $\boldsymbol{p}$.

   Lösning: $x = y = z = t$ insatt i ellipsoidens ekvation $\Longrightarrow t^2+t^2+2t^2 = 1 \iff t^2 = 1/4 \iff t = \pm 1/2$. Så $\boldsymbol{p} = (1/2, 1/2, 1/2)$.

   $F = x^2 + y^2 + 2z^2 \Longrightarrow \operatorname{grad} F = (2x, 2y, 4z) \Longrightarrow \operatorname{grad} F(\boldsymbol{p}) = (1, 1, 2)$, som är den utåtrikade normalvektorn i $\boldsymbol{p}$. Så den sökta vinkeln ϕ ges av

$$\cos\phi = \frac{(1,1,1)\bullet(1,1,2)}{|(1,1,1)|\cdot|(1,1,2)|} = \frac{1+1+2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$
$$\Longrightarrow \phi = \arccos\frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 19{,}5^\circ.$$

KTH Matematik
Olle Stormark

Lösning till kontrollskrivning 2A

i SF1626 Flervariabelanalys för E, vt 2008.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Betrakta kurvan $x^3 + y^2 = 1$ i xy-planet.

   (a) I vilka punkter på kurvan kan denna lokalt uppfattas som grafen av en funktion $y = y(x)$? (1p)

   (b) Beräkna $y''(x)$ (som funktion av x och $y(x)$) i dessa punkter. (2p)

   Lösning: (a) $F = x^3 + y^2 - 1 \Longrightarrow \partial F/\partial y = 2y$, så $\partial F/\partial y = 0 \iff y = 0$. SVAR: I punkter där $y \neq 0$.

   (b) d/dx på $x^3 + y^2(x) - 1 = 0 \Longrightarrow 3x^2 + 2y \cdot y' = 0 \Longrightarrow$

$$y' = -\frac{3x^2}{2y(x)} \Longrightarrow y'' = \frac{-2y \cdot 6x + 3x^2 \cdot 2y'}{4y^2}$$
$$= -\frac{3x}{2} \cdot \frac{2y - x \cdot (-3x^2/2y)}{y^2} = -\frac{3x}{4y^3}(4y^2 + 3x^3).$$

2. Bestäm alla lokala maxima, lokala minima och sadelpunkter för funktionen
$$f(x, y) = 2x^2y - y^2 + 4x.$$
   (1 poäng för stationära punkter, 2 poäng för deras karaktär).

Lösning:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + 4 = 4(xy+1)$$
$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 - 2y = 2(x^2 - y) \Longrightarrow y = x^2$$
$$\Longrightarrow x^3 + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1 \Longrightarrow y = 1 \Longrightarrow \text{stationära punkten } (-1, 1).$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 \Longrightarrow \text{ i punkten } (-1,1) \text{ att}$$
$$A = 4,\ B = -4,\ C = -2 \Longrightarrow AC - B^2 = -8 - 16 < 0 \Longrightarrow \text{sadelpunkt.}$$

3. Låt $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ vara en deriverbar kurva i xy-planet och låt $\boldsymbol{p}$ vara en punkt som *inte* ligger på kurvan. Visa att om avståndet $|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r}(t)|$ minimeras då $t = t_0$ så är vektorn $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r}(t_0)$ vinkelrät mot kurvan i $\boldsymbol{r}(t_0)$. *Ledning:* Minimera funktionen $f(t) = |\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r}(t)|^2$!

   Lösning:

$$\frac{df}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\left((\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r}(t)) \cdot (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r}(t))\right) = 2(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r}(t)) \cdot \left(-\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right),$$

   så $df/dt = 0$ för $t = t_0 \Longrightarrow (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r}(t_0))$ är vinkelrät mot tangentvektorn $d\boldsymbol{r}/dt(t_0) \iff$ är vinkelrät mot kurvan i $\boldsymbol{r}(t_0)$.

KTH Matematik
Olle Stormark

Lösning till kontrollskrivning 2B

i SF1626 Flervariabelanalys för E, vt 2008.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Betrakta kurvan $x^4y^5 = 1$ i xy-planet.

   (a) I vilka punkter på kurvan kan denna lokalt uppfattas som grafen av en funktion $y = y(x)$? (1p)

   (b) Beräkna $y''(x)$ (som funktion av x och $y(x)$) i dessa punkter. (2p)

   Lösning: (a) $F = x^4y^5 - 1 \Longrightarrow \partial F/\partial y = 5x^4y^4$, så $\partial F/\partial y = 0 \iff xy = 0$. SVAR: I punkter där kurvan *inte* skär koordinataxlarna.

   (b) d/dx på $x^4 \cdot y^5(x) - 1 = 0 \Longrightarrow 4x^3 \cdot y^5 + 5x^4 \cdot y^4 \cdot y' = 0 \iff x^3y^4 \cdot (4y + 5x \cdot y') = 0 \Longrightarrow$

$$y' = -\frac{4y(x)}{5x} \Longrightarrow y'' = \frac{-5x \cdot 4y' + 4y \cdot 5}{25x^2} = \frac{20}{25x^2}\left(y - x \cdot \frac{-4y}{5x}\right)$$
$$= \frac{20}{25x^2} \cdot \frac{5y + 4y}{5} = \frac{4 \cdot 9y}{25x^2} = \frac{36y}{25x^2}.$$

2. Bestäm alla lokala maxima, lokala minima och sadelpunkter för funktionen

$$f(x, y) = x^3 - 4x^2 - xy - y^2.$$

   (1 poäng för stationära punkter, 2 poäng för deras karaktär).

Lösning:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 8x - y,\\
0 &= \frac{\partial f}{\partial y} = -x - 2y \Longrightarrow x = -2y \Longrightarrow 3\cdot 4y^2 + 16y - y = 0
\end{aligned}
$$

$$
\iff 3y\cdot(4y+5) = 0 \iff y = \begin{cases} 0 \\ -5/4 \end{cases} \Longrightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 5/2. \end{cases}
$$

Så de stationära punkterna är $(0,0)$ och $(5/2,-5/4)$. Andraderivatorna blir

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 8, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2.
$$

I $(0,0)$ fås: $A = -8$, $B == -1$, $C = -2 \Longrightarrow AC - B^2 = 16 - 1 > 0$. Och $A < 0$, $AC - B^2 > 0 \Longrightarrow$ **lokalt maximum**.

I $(5/2,-5/4)$ fås: $A = 15 - 8 = 7$, $B = -1$, $C = -2 \Longrightarrow AC - B^2 = -14 - 1 < 0 \Longrightarrow$ **sadelpunkt**.

3. Låt $f(x,y)$ och $g(x,y)$ vara differentierbara funktioner. Visa följande produktregel för differentialer:

$$
d(f\cdot g) = df\cdot g + f\cdot dg.
$$

Lösning:

$$
\begin{aligned}
d(f\cdot g) &= \frac{\partial}{\partial x}(f\cdot g)\,dx + \frac{\partial}{\partial y}(f\cdot g)\,dy\\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot g + f\cdot\frac{\partial g}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\cdot g + f\cdot\frac{\partial g}{\partial y}\right)dy\\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy\right)\cdot g + f\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial x}\,dx + \frac{\partial g}{\partial y}\,dy\right)\\
&= df\cdot g + f\cdot dg.
\end{aligned}
$$

KTH Matematik
Olle Stormark

Lösning till kontrollskrivning 3A

i SF1626 Flervariabelanalys för E, vt 2008.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Beräkna arean av en cirkelskiva med radien R.

   Lösning: Med polära koordinater blir arean lika med

$$\iint_{x^2+y^2\le R^2} dxdy = \int_{r=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi} r\,drd\phi = \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \cdot \int_{r=0}^{R} r\,dr$$
$$= 2\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{R} = \pi R^2.$$

2. Beräkna volymen av glasstruten $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon \sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\}$.

   Lösning: Struten begränsas nedåt av konen $z=\sqrt{x^2+y^2}$ som i sfäriska koordinater ges av $\theta=\pi/4$, och uppåt av sfären $x^2+y^2+z^2=2^2$ med radien lika med 2. Så med hjälp av sfäriska koordinater blir volymen lika med

$$\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi/4}\int_{\phi=0}^{2\pi} r^2\sin\theta\,drd\theta d\phi = \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi\cdot\int_{\theta=0}^{\pi/4}\sin\theta\,d\theta\cdot\int_{r=0}^{R} r^2\,dr$$
$$= 2\pi\cdot[-\cos\theta]_0^{\pi/4}\cdot\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 = 2\pi\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{8}{3} = \frac{8\pi}{3}\left(2-\sqrt{2}\right).$$

3. Beräkna arean av den del av planet $2x + 2y + z = 2$ som ligger inom rotationsparaboloiden $z = x^2 + y^2$.

LEDNING: Det är *väldigt* lätt att beräkna arean av projektionen på xy-planet!

Lösning: På skärningen mellan planet och paraboloiden är

$$
\begin{aligned}
&z = 2 - 2x - 2y = x^2 + y^2 \Longrightarrow x^2 + 2x + y^2 + 2y = 2 \iff \\
&(x+1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1 = 2 \iff (x+1)^2 + (y+1)^2 = 2^2,
\end{aligned}
$$

så projektionen av skärningskurvan ner på xy-planet blir cirkeln med medelpunkt i $(-1, -1)$ och radien 2. Med $E =$ cirkelskivan $\{(x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 2^2\}$ blir den sökta arean lika med

$$
\begin{aligned}
&\iint_E \sqrt{1 + (\partial z/\partial x)^2 + (\partial z/\partial y)^2}\, dxdy = \iint_E \sqrt{1 + 2^2 + 2^2}\, dxdy \\
&= 3 \cdot \iint_E dxdy = 3 \cdot \text{ arean av } E = 3 \cdot \pi \cdot 2^2 = 12\pi.
\end{aligned}
$$

KTH Matematik
Olle Stormark

Lösning till kontrollskrivning 3B

i SF1626 Flervariabelanalys för E, vt 2008.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Beräkna volymen av ett klot med radien R.

   Lösning: Med hjälp av sfäriska koordinater blir volymen lika med
$$\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} r^2\sin\theta\,drd\theta d\phi = \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi\cdot\int_{\theta=0}^{\pi}\sin\theta\,d\theta\cdot\int_{r=0}^{R} r^2\,dr$$
$$= 2\pi[-\cos\theta]_0^{\pi}\cdot\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R = 2\pi\cdot(1+1)\cdot\frac{R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

2. Beräkna arean av ellipsskivan
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1.$$

   Lösning: Sätt först $u = x/2$ och $v = y/3$ så att olikheten ovan övergår i $u^2+v^2 \le 1$ – som betyder enhetsskivan i uv-planet. Inför sedan polära koordinater: $u = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$. Då blir
$$\begin{cases} x = 2u = 2r\cos\phi, \\ y = 3v = 3r\sin\phi, \end{cases}$$
där $0 \le r \le 1$ och $0 \le \phi \le 2\pi$. Med dessa så kallade elliptiska koordinater blir
$\dfrac{d(x,y)}{d(r,\phi)} = \det\begin{pmatrix} 2\cos\phi & -2r\sin\phi \\ 3\sin\phi & 3r\cos\phi\end{pmatrix} = 6r\cdot(\cos^2\phi+\sin^2\phi) = 6r,$ så att
$dxdy = \left|\dfrac{d(x,y)}{d(r,\phi)}\right| drd\phi = 6r\,drd\phi$. Därmed blir arean lika med
$$\int_{r=0}^{1}\int_{\phi=0}^{2\pi} 6r\,drd\phi = 6\cdot\int_0^{2\pi} d\phi\cdot\int_0^1 r\,dr = 6\cdot 2\pi\cdot\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = 6\pi.$$

3. Beräkna arean av den del av sadelytan $z = x^2 - y^2$ som ligger ovanför området $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x \geq 0,\ -x \leq y \leq x,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ i xy-planet.

Lösning: Med $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x \geq 0,\ -x \leq y \leq x,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ blir den sökta arean lika med

$$\iint_E \sqrt{1 + (\partial z/\partial x)^2 + (\partial z/\partial y)^2}\, dxdy = \iint_E \sqrt{1 + (2x)^2 + (-2y)^2}\, dxdy$$
$$= \iint_E \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dxdy = \int_{r=0}^{1} \int_{\phi=-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, drd\phi$$
$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\phi \cdot \int_0^1 (1 + 4r^2)^{1/2} r\, dr = \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot (1 + 4r^2)^{3/2}\right]_0^1$$
$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{12} \cdot \big(5^{3/2} - 1\big) = \frac{\pi}{24}(5\sqrt{5} - 1).$$

KTH Matematik,
Olle Stormark.

Lösningsförslag till KS 4A

i SF1633 Flervariabelanalys för E, vt 2008.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Bestäm de största och minsta värdena av funktionen $f(x,y) = x + 2y$ på enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$.

   Lösning: Med $g = x^2 + y^2 - 1$ blir Lagrangesystemet

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} g \\ g = 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{r} 1 = \lambda \cdot 2x, \\ 2 = \lambda \cdot 2y, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{array}\right.$$

   $y \cdot$ (första ekvationen) $- x \cdot$ (andra ekvationen) $\implies y - 2x = 0 \iff y = 2x$. Insatt i den tredje ekvationen ger detta

$$x^2 + 4x^2 = 1 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \implies \text{punkterna } \pm\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

   f:s värden i dessa punkter är

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \text{ och } f\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right) = -\sqrt{5}.$$

   SVAR: Största värdet är $= \sqrt{5}$, minsta är $= -\sqrt{5}$.

2. Bestäm de största och minsta värdena av funktionen

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$$

på den slutna enhetsskivan $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Lösning: *Inre stationära punkter:*

$$\begin{cases} 0 = \partial f/\partial x = 2x - 1 \iff x = 1/2, \\ 0 = \partial f/\partial y = 4y \iff y = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ punkten $(1/2,\, 0)$, där $f = 1/4 - 1/2 = -1/4$.

Randen: Där är $y^2 = 1 - x^2$, så $f = x^2 + 2 - 2x^2 - x = -x^2 - x + 2 = g(x)$, säg, med $-1 \leq x \leq 1$. $0 = g'(x) = -2x - 1 \Longrightarrow x = -1/2$. Så vi får följande kandidater till största och minsta värde på randen:

$$\begin{aligned} g(-1) &= -1 + 1 + 2 = 2, \\ g(-1/2) &= -1/4 + 1/2 + 2 = 2 + 1/4, \\ g(1) &= -1 - 1 + 2 = 0. \end{aligned}$$

SVAR: Största värdet $= 2 + 1/4$, minsta $= -1/4$.

3. Beräkna

$$I = \int_\gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{(x-y)^2}$$

där γ är den del av enhetscirkeln som går från $(0,-1)$ till $(1,0)$ i den fjärde kvadranten.

Lösning: $I = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy$, där

$$P = \frac{-y}{(x-y)^2} \quad \text{och} \quad Q = \frac{x}{(x-y)^2}.$$

RÄTTFRAMMA RÄKNINGAR visar att $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y = 0$, så vi kan byta väg (så länge som vi håller oss borta från den elaka linjen $x - y = 0$): låt oss väja $y = x - 1$, där x löper från 0 till 1. På denna är $x - y = 1$ och $dy = dx$, så den sökta integralen reduceras till

$$I = \int_{x=0}^{1} \frac{x\,dx - (x-1)\,dx}{1^2} = \int_0^1 dx = 1.$$

KTH Matematik,
Olle Stormark.

Lösningsförslag till KS 4B

i SF 1633 Flervariabelanalys för E, vt 2008.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Bestäm de största och de minsta värdena av funktionen $f(x, y) = x + y$ på ellipsen $x^2/4 + y^2/9 = 1$.

   Lösning: Med $g = x^2/4 + y^2/9 - 1$ fås Lagrangesystemet

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} g \\ g = 0 \end{array}\right\} \iff \begin{cases} 1 = \dfrac{\lambda}{2}\, x, \\ 1 = \dfrac{2\lambda}{9}\, y, \\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1. \end{cases}$$

   $4y \cdot$ (första ekvationen) $- 9x \cdot$ (andra ekvationen) $\Longrightarrow 4y - 9x = 0 \iff y = 9x/4$; insatt i den tredje ekvationen fås sedan

$$\frac{x^2}{4} + \frac{9x^2}{16} = 1 \iff \frac{13x^2}{16} = 1 \iff x = \pm\frac{4}{\sqrt{13}} \Longrightarrow y = \pm\frac{9}{\sqrt{13}}.$$

   f:s värden i de två funna punkterna är

$$f\left(\frac{4}{\sqrt{13}}, \frac{9}{\sqrt{13}}\right) = \sqrt{13} \text{ och } f\left(-\frac{4}{\sqrt{13}}, \frac{9}{\sqrt{13}}\right) = \sqrt{13}.$$

   SVAR: Största värdet är $= \sqrt{13}$ och det minsta är $= -\sqrt{13}$.

2. Bestäm de största och minsta värdena som funktionen
$$f(x,y) = x^2 - 2x - 2y$$
antar på den slutna enhetskvadraten $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le x \le 1 \text{ och } 0 \le y \le 1\}$.

   Lösning: *Inre stationära punkter:* $\partial f/\partial y = -2 \ne 0 \Longrightarrow$ finns inga!

   Randen består av 4 räta linjestycken, som får undersökas var för sig.

   (1) $y = 0$ och $0 \le x \le 1 \Longrightarrow f = x^2 - 2x$; derivatan $2x - 2 = 0$ ger $x = 1$. Så vi får följande kandidater till största och minsta värden:
$$f(0,0) = 0,$$
$$f(1,0) = 1 - 2 = -1.$$

   (2) $x = 1$ och $0 \le y \le 1 \Longrightarrow f = -1 - 2y$, som är *avtagande.* Så största värdet är $f(1,0) = -1$, och det minsta är $f(1,1) = -3$.

   (3): $y = 1$ och $0 \le x \le 1$, respektive (4): $x = 0$ och $0 \le y \le 1$, behandlas på samma sätt.

   SVAR: Största värdet är 0 i $(0,0)$, minsta är -3 i $(1,1)$.

3. Beräkna
$$I = \oint_\gamma (e^x \cos x - y)\,dx + (2xy - \arctan(y^2))\,dy,$$
där γ är den positivt orienterade randen till området $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 \le y \le 1\}$.

   Lösning: $I = \oint_\gamma P\,dx + Q\,dy$, där
$$P = e^x \cos x - y \quad \text{och} \quad Q = 2xy - \arctan(y^2).$$
Därmed blir $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y = 2y + 1$. Green säger då att
$$\begin{aligned} I &= \iint_D (2y+1)\,dxdy = \int_{x=-1}^{x=1} \left[y^2 + y\right]_{y=x^2}^{y=1} dx \\ &= \int_{-1}^{1} (2 - x^4 - x^2)\,dx = 2\int_0^1 (2 - x^4 - x^2)\,dx \\ &= 2\left[2x - \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(2 - \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) \\ &= \cdots = \frac{44}{15}. \end{aligned}$$