

Lösningssförslag till kompletteringstentamen den 11 juni i kursen Differentialekvationer I, SF1633 (5B1206).

Modul 1

Du och Osquar ska studera en funktion y som uppfyller differenskvationen

$$y'(x) = -y^3 e^{\sin y}$$

och där $y(0) = 17$. Du inser att det inte går att lösa denna differenskvation, men Osquar påstår ändå att $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$. Har Osquar rätt eller fel? Motivera ditt svar.

Lösning. Ekvationen är autonom så vad som händer efter lång tid kan kvalitativt studeras med hjälp av kritiska punkter. En kritisk punkt är en punkt där $f(y) = -y^3 e^{\sin y} = 0$, detta gäller endast då $y = 0$. Då $y > 0$ är $f(y) < 0$ och därför kommer $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$ så Osquar har rätt.

Svar: Osquar har rätt.

Modul 2

Bestäm en funktion $f(t)$ som uppfyller att

$$e^t \int_0^t f(\tau) e^{-\tau} d\tau = t^2.$$

Lösning. Ekvationen kan skrivas som $f * e^t = t^2$. Vi Laplacetransformerar båda led och får $\frac{F(s)}{s-1} = \frac{2}{s^3}$. Alltså är

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2} - \frac{2}{s^3}\right) = 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^3}\right) = 2t - t^2.$$

Svar: $f(t) = 2t - t^2$.

Modul 3

Bestäm en funktion $u(x, y)$ sådan att

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

och där $u(x, 0) = x^2 + 2x^3$.

Lösning. Vi söker lösningar på formen $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Stoppa vi in detta i ekvationen får vi $xX'(x)Y(y) + X(x)Y'(y) = 0$, varför

$$x \frac{X'(x)}{X(x)} = -\frac{Y'(y)}{Y(y)} = -\lambda.$$

Detta ger $X'(x) + \frac{\lambda}{x}X(x) = 0$ och $Y'(y) - \lambda Y(y) = 0$. Den första ekvationen har lösningarna $X(x) = Ax^{-\lambda}$ och den andra $Y(y) = Be^{\lambda y}$. Alltså är funktionerna

$u_\lambda(x, y) = C_\lambda x^{-\lambda} e^{\lambda y}$ lösningar till ekvationen. Eftersom ekvationen är linjär och homogen är även summan av två lösningar en lösning, alltså är $u(x, y) = u_{\lambda_1}(x, y) + u_{\lambda_2}(x, y) = C_{\lambda_1} x^{-\lambda_1} e^{\lambda_1 y} + C_{\lambda_2} x^{-\lambda_2} e^{\lambda_2 y}$ också lösningar. Stoppa in $y = 0$ i detta, det ger $u(x, 0) = C_{\lambda_1} x^{-\lambda_1} + C_{\lambda_2} x^{-\lambda_2}$ och vi vill att det ska bli $u(x, 0) = x^2 + 2x^3$. För att detta ska stämma sätter vi $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$, $C_{\lambda_1} = 1$ och $C_{\lambda_2} = 2$. Detta ger att $u(x, y) = x^2 e^{-2y} + 2x^3 e^{-3y}$.

Svar: $u(x, y) = x^2 e^{-2y} + 2x^3 e^{-3y}$.

Modul 4

Bestäm funktionerna $x(t)$ och $y(t)$ sådana att

$$\begin{cases} x'(t) = 2x - 2y \\ y'(t) = 2x + 6y \end{cases}$$

och där $x(0) = 1$ och $y(0) = 0$.

Lösning. För att lösa problemet måste vi hitta egenvärden och egenvektorer till $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Egenvärdena ges av

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ 2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(6 - \lambda) + 4 = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2 = 0.$$

Alltså är $\lambda = 4$ ett dubbelt egenvärde. Vi söker efter egenvektorer till $\lambda = 4$, dessa ges av

$$\begin{pmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ 2 & 6 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi ser att egenvektorererna är på formen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Alltså är $X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{4t}$ en lösning till systemet och en annan lösning ges av $X_2(t) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + w \right) e^{4t}$, där w är en lösning till

$$\begin{pmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ 2 & 6 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Detta uppfylls av till exempel $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Allmänna lösningen till systemet är därmed $X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{4t} + C_2 \begin{pmatrix} t - 1/2 \\ -t \end{pmatrix} e^{4t}$. I vårt fall var $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ så vi får $C_1 - C_2/2 = 1$ och $-C_1 = 0$. Detta ger $C_1 = 0$ och $C_2 = -2$ varför

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 - 2t \\ 2t \end{pmatrix} e^{4t}.$$

Svar: $x(t) = (1 - 2t)e^{4t}$ och $y(t) = 2te^{4t}$.