Lösningsförslag till kontrollskrivning 2

1A. Låt $u(t)$ beteckna Heaviside-funktionen. Beräkna $\mathscr{L}(3u(t-2)u(4-t))$.

Lösning. Heaviside-funktionen $u(t)$ är 0 om $t<0$ och 1 om $t>0$. Därför är $u(t-2)$ en funktion som är 1 då $t>2$ och 0 annars och $u(4-t)$ en funktion som är 1 då $t<4$ och 0 annars. Produkten av dessa två funktioner är en funktion som är 1 för $2<t<4$ och 0 annars. Laplacetransformen blir därför

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(3u(t-2)u(4-t)) &= \int_0^\infty e^{-st}3u(t-2)u(4-t)dt = \int_2^4 e^{-st}3dt = 3\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_2^4 \\ &= 3\frac{e^{-2s}-e^{-4s}}{s}.\end{aligned}$$

Svar: $3\frac{e^{-2s}-e^{-4s}}{s}$

1B. Låt $u(t)$ beteckna Heaviside-funktionen. Beräkna $\mathscr{L}(2u(t-1)u(2-t))$.

Lösning. Heaviside-funktionen $u(t)$ är 0 om $t<0$ och 1 om $t>0$. Därför är $u(t-1)$ en funktion som är 1 då $t>1$ och 0 annars och $u(2-t)$ en funktion som är 1 då $t<2$ och 0 annars. Produkten av dessa två funktioner är en funktion som är 1 för $1<t<2$ och 0 annars. Laplacetransformen blir därför

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(2u(t-1)u(2-t)) &= \int_0^\infty e^{-st}2u(t-1)u(2-t)dt = \int_1^2 e^{-st}2dt = 2\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_1^2 \\ &= 2\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s}.\end{aligned}$$

Svar: $2\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s}$

2A. Finn en funktion $f(t)$ sådan att $f(0)=2$ och där

$$f'(t) + 5\int_0^t e^{2\tau}\left(f(t-\tau)-4\right)d\tau = 10.$$

Lösning. Vi börjar med att observera att integralen i ekvationen kan uppfattas som en faltning mellan e^{2t} och $f(t)-4$. Vi Laplacetransformerar båda led och får

$$\mathscr{L}(f'(t) + 5e^{2t} * (f(t)-4)) = \mathscr{L}(10).$$

Eftersom Laplacetransformen är linjär kan vi skriva detta som

$$\mathscr{L}(f'(t)) + 5\mathscr{L}(e^{2t} * (f(t)-4)) = 10\mathscr{L}(1).$$

Vi använder formelsamlingen och ser att detta kan skrivas som

$$sF(s) - f(0) + 5\frac{1}{s-2}\left(F(s) - \frac{4}{s}\right) = \frac{10}{s}.$$

Vi stoppar in att $f(0) = 2$, flyttar allt som inte innehåller $F(s)$ till högerleder och bryter ut $F(s)$. Uttrycket blir

$$\begin{aligned}\left(s + \frac{5}{s-2}\right) F(s) &= 2 + \frac{10}{s} + \frac{20}{s(s-2)} = 2 + \frac{10}{s} + \frac{10}{s-2} - \frac{10}{s} = 2 + \frac{10}{s-2} \\ &= \frac{2s+6}{s-2}.\end{aligned}$$

Alltså är $F(s)$ given av

$$F(s) = \frac{2s+6}{s(s-2)+5} = \frac{2s+6}{s^2-2s+5} = \frac{2s+6}{(s-1)^2+4} = \frac{2(s-1)+8}{(s-1)^2+4}.$$

Ur enligt förskjutningslagen och linearitet hos $\mathscr{L}^{-1}$ följer ur detta att

$$\begin{aligned}f(t) &= \mathscr{L}^{-1}(F(s)) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{2(s-1)+8}{(s-1)^2+4}\right) = e^t \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{2s+8}{s^2+4}\right) \\ &= 2\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) + 4\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) = e^t(2\cos 2t + 4\sin 2t)\end{aligned}$$

Svar: $e^t(2\cos 2t + 4\sin 2t)$

2B. Finn en funktion $f(t)$ sådan att $f(0) = 1$ och där

$$f'(t) + 13\int_0^t e^{-4\tau}\,(4 + f(t-\tau))\,d\tau = 13.$$

Lösning. Vi börjar med att observera att integralen i ekvationen kan uppfattas som en faltning mellan e^{-4t} och $4 + f(t)$. Vi Laplacetransformerar båda led och får

$$\mathscr{L}(f'(t) + 13e^{-4t} * (4 + f(t))) = \mathscr{L}(13).$$

Eftersom Laplacetransformen är linjär kan vi skriva detta som

$$\mathscr{L}(f'(t)) + 13\mathscr{L}(e^{-4t} * (4 + f(t))) = 13\mathscr{L}(1).$$

Vi använder formelsamlingen och ser att detta kan skrivas som

$$sF(s) - f(0) + 13\frac{1}{s+4}\left(F(s) + \frac{4}{s}\right) = \frac{13}{s}.$$

Vi stoppar in att $f(0) = 1$, flyttar allt som inte innehåller $F(s)$ till högerleder och bryter ut $F(s)$. Uttrycket blir

$$\begin{aligned}\left(s + \frac{13}{s+4}\right) F(s) &= 1 + \frac{13}{s} - \frac{52}{s(s+4)} = 1 + \frac{13}{s} + \frac{13}{s+4} - \frac{13}{s} = 1 + \frac{13}{s+4} \\ &= \frac{s+17}{s+4}.\end{aligned}$$

Alltså är $F(s)$ given av

$$F(s) = \frac{s+17}{s(s+4)+13} = \frac{s+17}{s^2+4s+13} = \frac{s+17}{(s+2)^2+9} = \frac{(s+2)+15}{(s+2)^2+9}.$$

Ur enligt förskjutningslagen och linearitet hos $\mathscr{L}^{-1}$ följer ur detta att

$$\begin{aligned}f(t) = \mathscr{L}^{-1}(F(s)) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{(s+2)+15}{(s+2)^2+9}\right) = e^{-2t}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s+15}{s^2+9}\right) \\ = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+9}\right) + 5\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^2+9}\right) = e^{-2t}(\cos 3t + 5\sin 3t)\end{aligned}$$

Svar: $e^{-2t}(\cos 3t + 5\sin 3t)$

3A. Bestäm en funktion $y(t)$ sådan att $y(0) = 2$ och där

$$y'(t) + 7y(t) = \cos t + 3\delta(t-1).$$

Lösning. Vi Laplacetransformerar båda led och får

$$\mathscr{L}(y'(t) + 7y(t)) = \mathscr{L}(\cos t + 3\delta(t-1)).$$

Med hjälp av linearitet och formelsamling förenklar vi detta till

$$sY(s) - y(0) + 7Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + 3e^{-s}.$$

Vi stoppar in att $y(0) = 2$ och löser ut $Y(s)$, vi får

$$Y(s) = \frac{2}{s+7} + \frac{s}{(s+7)(s^2+1)} + e^{-s}\frac{3}{s+7}.$$

Partialbråksuppdelning av mittentermen ger

$$\frac{s}{(s+7)(s^2+1)} = -\frac{7}{50}\frac{1}{s+7} + \frac{7}{50}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{50}\frac{1}{s^2+1},$$

alltså är

$$Y(s) = \frac{93}{50}\frac{1}{s+7} + \frac{7}{50}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{50}\frac{1}{s^2+1} + e^{-s}\frac{3}{s+7}.$$

Vi inverterar detta uttryck, använder lineariteten hos $\mathscr{L}^{-1}$ och observerar att e^{-s} motsvarar en förskjutning ett steg åt höger för att få

$$\begin{aligned}y(t) = \mathscr{L}^{-1}(Y(s)) = \frac{93}{50}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+7}\right) + \frac{7}{50}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) \\ + \frac{1}{50}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) + 3u(t-1)\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+7}\right)(t-1) \\ = \frac{93}{50}e^{-7t} + \frac{7}{50}\cos t + \frac{1}{50}\sin t + 3u(t-1)e^{-7(t-1)}.\end{aligned}$$

Svar: $\frac{93}{50}e^{-7t} + \frac{7}{50}\cos t + \frac{1}{50}\sin t + 3u(t-1)e^{-7(t-1)}$

3B. Bestäm en funktion $y(t)$ sådan att $y(0) = 3$ och där

$$y'(t) + 5y(t) = 2\sin t + 2\delta(t-7).$$

Lösning. Vi Laplacetransformerar båda led och får

$$\mathscr{L}(y'(t) + 5y(t)) = \mathscr{L}(2\sin t + 2\delta(t-7)).$$

Med hjälp av linearitet och formelsamling förenklar vi detta till

$$sY(s) - y(0) + 5Y(s) = \frac{2}{s^2+1} + 2e^{-7s}.$$

Vi stoppar in att $y(0) = 3$ och löser ut $Y(s)$, vi får

$$Y(s) = \frac{3}{s+5} + \frac{2}{(s+5)(s^2+1)} + e^{-7s}\frac{2}{s+5}.$$

Partialbråksuppdelning av mittentermen ger

$$\frac{2}{(s+5)(s^2+1)} = \frac{1}{13}\frac{1}{s+5} - \frac{1}{13}\frac{s}{s^2+1} + \frac{5}{13}\frac{1}{s^2+1},$$

alltså är

$$Y(s) = \frac{40}{13}\frac{1}{s+5} - \frac{1}{13}\frac{s}{s^2+1} + \frac{5}{13}\frac{1}{s^2+1} + e^{-7s}\frac{2}{s+5}.$$

Vi inverterar detta uttryck, använder lineariteten hos $\mathscr{L}^{-1}$ och observerar att e^{-7s} motsvarar en förskjutning sju steg åt höger för att få

$$\begin{aligned}
y(t) = \mathscr{L}^{-1}(Y(s)) &= \frac{40}{13}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+5}\right) - \frac{1}{13}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) \\
&+ \frac{5}{13}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) + 2u(t-7)\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+5}\right)(t-7) \\
&= \frac{40}{13}e^{-5t} - \frac{1}{13}\cos t + \frac{5}{13}\sin t + 2u(t-7)e^{-5(t-7)}.
\end{aligned}$$

Svar: $\frac{40}{13}e^{-5t} - \frac{1}{13}\cos t + \frac{5}{13}\sin t + 2u(t-7)e^{-5(t-7)}$