

Lösningförslag till kontrollskrivning 3

1A. Bestäm alla kritiska punkter till det autonoma systemet

$$\begin{cases} x'(t) = e^x + ye^x \\ y'(t) = 1 + x + xy - x^3 \end{cases}$$

och avgör om de är stabila eller instabila.

Lösning. En kritisk punkt är en punkt x, y där högerledet är noll. Med andra ord söker vi lösningar till

$$\begin{cases} e^x + ye^x = 0 \\ 1 + x + xy - x^3 = 0 \end{cases}$$

Första raden säger att $e^x + ye^x = (1 + y)e^x = 0$, men $e^x \neq 0$ så vi måste ha $y = -1$. Stoppar vi in detta i andra raden får vi $1 - x^3 = 0$, vilket ger $x = 1$. Alltså är $(1, -1)$ den enda kritiska punkten. Matrisen som hör till det lineariserade systemet kring den kritiska punkten är Jacobi-matrisen och den beräknas till

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} e^x + ye^x & e^x \\ 1 + y - 3x^2 & x \end{pmatrix}.$$

I vårt fall är $x = 1$ och $y = -1$ vilket ger

$$J(1, -1) = \begin{pmatrix} 0 & e \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eigenvärdena till denna matris ges av

$$\begin{vmatrix} -\lambda & e \\ -3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1 - \lambda) + 3e = \lambda^2 - \lambda + 3e = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 + 3e - \frac{1}{4} = 0.$$

Alltså är $\lambda = 1/2 \pm i\sqrt{3e - 1/4}$ vilket är en instabil spiralpunkt.

Svar: $(x, y) = (1, -1)$ är den enda kritiska punkten och den är instabil.

1B. Bestäm alla kritiska punkter till det autonoma systemet

$$\begin{cases} x'(t) = 1 + y - xy - y^3 \\ y'(t) = e^y - xe^y \end{cases}$$

och avgör om de är stabila eller instabila.

Lösning. En kritisk punkt är en punkt x, y där högerledet är noll. Med andra ord söker vi lösningar till

$$\begin{cases} 1 + y - xy - y^3 = 0 \\ e^y - xe^y = 0 \end{cases}$$

Andra raden säger att $e^y - xe^y = (1 - x)e^y = 0$, men $e^y \neq 0$ så vi måste ha $x = 1$. Stoppar vi in detta i första raden får vi $1 - y^3 = 0$, vilket ger $y = 1$.

Alltså är $(1, 1)$ den enda kritiska punkten. Matrisen som hör till det lineariserade systemet kring den kritiska punkten är Jacobi-matrisen och den beräknas till

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -y & 1 - x - 3y^2 \\ -e^y & e^y - xe^y \end{pmatrix}.$$

I vårt fall är $x = 1$ och $y = 1$ vilket ger

$$J(1, 1) = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -e & 0 \end{pmatrix}.$$

Eigenvärdena till denna matris ges av

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & -3 \\ -e & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-1 - \lambda) - 3e = \lambda^2 + \lambda - 3e = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 - 3e - \frac{1}{4} = 0.$$

Alltså är $\lambda = -1/2 \pm \sqrt{3e + 1/4}$ vilket är en sadelpunkt och dessa är instabila.

Svar: $(x, y) = (1, 1)$ är den enda kritiska punkten och den är instabil.

2A. Bestäm allmänna lösningen till diffekvationen

$$(1 - x^2)y'' - xy' + 4y = 6x$$

på intervallet $-1 < x < 1$. Dra nytta av att ni vet att funktionerna $y_1(x) = 2x$, $y_2(x) = 2x^2 + 2x - 1$ och $y_3(x) = x\sqrt{1 - x^2} + 2x$ alla löser ekvationen (detta behöver ni inte bevisa).

Ledning: Kan du finna några homogena lösningar enkelt?

Lösning. Eftersom y_1 , y_2 och y_3 alla är lösningar till en linjär diffekvation är $y_2 - y_1 = 2x^2 - 1$ och $y_3 - y_1 = x\sqrt{1 - x^2}$ lösningar till den homogena ekvationen. Dessa är uppenbart linjärt oberoende så allmänna lösningen till den homogena ekvationen är $y_h = A(2x^2 - 1) + Bx\sqrt{1 - x^2}$. Allmänna lösningen till vår ekvation är nu $y = y_h + y_1 = A(2x^2 - 1) + Bx\sqrt{1 - x^2} + 2x$.

Svar: $y(x) = A(2x^2 - 1) + Bx\sqrt{1 - x^2} + 2x$.

2B. Bestäm allmänna lösningen till diffekvationen

$$(1 - x^2)y'' - xy' + y = -3x^2$$

på intervallet $-1 < x < 1$. Dra nytta av att ni vet att funktionerna $y_1(x) = x^2 + 2x - 2$, $y_2(x) = x^2 + \sqrt{1 - x^2} - 2$ och $y_3(x) = x^2 - 2x - 2$ alla löser ekvationen (detta behöver ni inte bevisa).

Ledning: Kan du finna några homogena lösningar enkelt?

Lösning. Eftersom y_1 , y_2 och y_3 alla är lösningar till en linjär diffekvation är $y_2 - y_1 = \sqrt{1 - x^2} - 2x$ och $y_3 - y_1 = -4x$ lösningar till den homogena ekvationen. I så fall är även $y(x) = x$ respektive $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$ lösningar till den homogena ekvationen. Dessa är uppenbart linjärt oberoende så allmänna lösningen till den homogena ekvationen är $y_h = Ax + B\sqrt{1 - x^2}$. Allmänna lösningen till vår ekvation är nu $y = y_h + y_1 = Ax + B\sqrt{1 - x^2} + x^2 + 2x - 2$.

Svar: $y(x) = Cx + D\sqrt{1 - x^2} + x^2 - 2$.

3A. Bestäm den lösning till systemet

$$\begin{cases} x'(t) = 3x - y \\ y'(t) = 6x - 4y \end{cases}$$

som uppfyller att $x(0) = 2$ och $y(0) = 7$.

Lösning. Vi inför $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ och får att uppgiften är $X' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} X$ med villkoret att $X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$. Eigenvärdena till matrisen bestäms av

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 6 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(-4 - \lambda) + 6 = \lambda^2 + \lambda - 6 = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 0.$$

Alltså är eigenvärdena $\lambda = -1/2 \pm 5/2$, dvs $\lambda = -3$ respektive $\lambda = 2$. Eigenvektorn för $\lambda = 2$ ges av

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 - \lambda & -1 & 0 \\ 6 & -4 - \lambda & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \end{array} \right)$$

så $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ är en egenvektor. För $\lambda = -3$ får vi

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 - \lambda & -1 & 0 \\ 6 & -4 - \lambda & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

så $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ är en egenvektor. Allmänna lösningen är därför

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} e^{-3t}.$$

Stoppar vi in $t = 0$ får vi $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 \\ C_1 + 6C_2 \end{pmatrix}$. Differensen mellan de två raderna ger $5C_2 = 7 - 2$ så $C_2 = 1$, vilket ger $C_1 = 1$.

Svar: $x(t) = e^{2t} + e^{-3t}$ och $y(t) = e^{2t} + 6e^{-3t}$.

3B. Bestäm den lösning till systemet

$$\begin{cases} x'(t) = 2x - 2y \\ y'(t) = 2x - 3y \end{cases}$$

som uppfyller att $x(0) = 1$ och $y(0) = -1$.

Lösning. Vi inför $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ och får att uppgiften är $X' = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} X$ med villkoret att $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Eigenvärdena till matrisen bestäms av

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ 2 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(-3 - \lambda) + 4 = \lambda^2 + \lambda - 2 = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0.$$

Alltså är egenvärdena $\lambda = -1/2 \pm 3/2$, dvs $\lambda = -2$ respektive $\lambda = 1$. Egenvektorn för $\lambda = 1$ ges av

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2-\lambda & -2 & 0 \\ 2 & -3-\lambda & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array} \right)$$

så $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ är en egenvektor. För $\lambda = -2$ får vi

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2-\lambda & -2 & 0 \\ 2 & -3-\lambda & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

så $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ är en egenvektor. Allmänna lösningen är därför

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

Stoppar vi in $t = 0$ får vi $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_1 + C_2 \\ C_1 + 2C_2 \end{pmatrix}$. Två gånger första raden minus andra raden ger $3C_1 = 3$ så $C_1 = 1$ och detta ger $C_2 = -1$.

Svar: $x(t) = 2e^t - e^{-2t}$ och $y(t) = e^t - 2e^{-2t}$.