Föreläsning 12

Vågekvationen

Om en sträng är uppspänd mellan $x = 0$ och $x = L$ beskrivs vågor på strängen av vågekvationen:

Ekvation:	$a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
Variabelvärden:	$0 \leq x \leq L$ och $t \geq 0$
Randvillkor:	$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases}$
Begynnelsevillkor:	$\begin{cases} u(x,0) &= f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= g(x) \end{cases}$

Lösningen är

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx \right) \cos \frac{n\pi}{aL} t + \left(\frac{2a}{n\pi} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx \right) \sin \frac{n\pi}{aL} t \right] \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Laplace ekvation

Ekvation: $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Variabelvärden: $0 \leq x \leq a$ och $0 \leq y \leq b$

Randvillkor: $$\begin{cases} u(0,y) = f(y) \\ u(a,y) = g(y) \\ u(x,0) = h(x) \\ u(x,b) = j(x) \end{cases}$$

Ekvationen har <u>inte</u> homogena randvillkor.

Lös först ekvationen med de homogena randvillkoren i x-led givna av $f(y) \equiv 0$ och $g(y) \equiv 0$.

Lös sedan ekvationen med de homogena randvillkoren i y-led givna av $h(x) \equiv 0$ och $j(x) \equiv 0$.

Summan av dessa båda lösningar är lösningen till Laplace ekvation.