

SF1645 - sammanfattning

- Projektioner och koordinater
 - Givet vektor v och linje L , skriv $v = v_L + v_N$ (komponentuppdelning) där v_L är parallell med L och v_N är vinkelrät mot L .
 - v_L kallas den *ortogonala projektionen av v på L* .
- Skalarprodukt
 - Om u är vektor, e en enhetsvektor som är parallell med linjen L , så är $u_L = (u \cdot e)e$, och $|u_L| = u \cdot e$.
 - Längd av vektor: $|v|^2 = v \cdot v$.
 - $u \cdot v = |u||v| \cos(\alpha)$ där α är vinkeln mellan u, v .
 - $u \cdot v = 0 \Leftrightarrow u$ och v vinkelräta *eller* någon av u, v lika med nollvektorn.
 - Sägar att u, v *ortogonala* om $u \cdot v = 0$.
 - Vektorna $v_1, v_2, \dots, v_n$ sägs vara *ortonormala* om $v_i \cdot v_j = 0$ om $i \neq j$, och $v_i \cdot v_i = 1$. OBS: ortonormala vektorer är automatiskt linjärt oberoende.
 - ON-bas: bas av ortonormala vektorer.
- Vektor/kryss-produkt
 - $|u \times v| = |u||v| \sin(\alpha)$ där α är vinkeln mellan u och v .
 - $u \times v$ vinkelrät mot både u och v .
 - Orientering: $(u, v, u \times v)$ *högerorienterad*.
- Geometri
 - Ekvation för plan/linjer (med och utan parameterform.)
 - Skärning mellan $\{\text{linje, plan}\}$ och $\{\text{linje, plan}\}$: lös ekvationssystem!
 - Avstånd mellan $\{\text{punkt, linje, plan}\}$ till $\{\text{linje, plan}\}$: projicera! (Alternativ: ställ upp ekvationssystem för ortogonalitet etc och lös.)
- Matriser
 - Speciella matriser: enhetsmatriser, diagonala, över-triangulära, under-triangulära.
 - Transponat: med $A = (a_{ij})$ är $A^t = (a_{ji})$. A är *symmetrisk* om $A^t = A$. Notera att $(AB)^t = B^t A^t$.
 - En linjär avbildning $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ kan beskrivas med en $n \times m$ matris. ("Ta reda på var enhetsvektorerna tar vägen".)
 - Viktiga geometriska avbildningar: vridning, spegling, projektion.
- Ekvationssystem
 - Skrivs kort som: $Ax = b$.
 - Om $b = 0$ finns alltid den *triviala lösningen* $x = 0$.
 - Hur lösa? Gausselimination! (Gör radoperationer tills systemet blir på trappform, bakåtsubstituera sedan.)
 - Minstakvadratmetoden: Om $Ax = b$ saknar lösning, hitta "bästa möjliga lösning", dvs minimera felet $|Ax - b|$. Hur? Lös

$$A^t Ax = A^t b.$$

- Determinanter
 - Geometrisk tolkning: $|\det(A)|$ ger area/volym (i $\mathbb{R}^2$ respektive $\mathbb{R}^3$.)
 - Viktig egenskap: determinanten som funktion i godtycklig rad/kolonn är linjär.

- $\det(A)$ oförändrad vid vissa rad/kolonnoperationer (t.ex. lägg till multipel av en rad till en annan rad.) *Byter tecken* om vi byter plats på två rader/kolonner.
- Regler: $\det(A^t) = \det(A)$, $\det(I) = 1$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Uträkning av $\det(A)$.
 - * 2×2 : formel.
 - * 3×3 : formel eller Sarrus (men se även nedan.)
 - * $n \times n$, $n > 3$:
 - $\det(A)$ lätt att räkna ut om A är övertriangulär - "gör om" A till övertriangulär mha radoperationer.
 - Utveckling efter rad/kolonn (speciellt om en rad/kolonn har många nollor.)
- Determinanter och ekvationssystem
 - Om A är kvadratisk har ekvationssystemet $Ax = b$
 - * *precis en* lösning oavsett vad b är om $\det(A) \neq 0$.
 - * ingen, eller oändligt många lösningar (det beror på b) om $\det(A) = 0$.
 - Icke-kvadratiske system: om $Ax = b$ har fler obekanta än ekvationer så har:
 - $Ax = 0$ oändligt många lösningar.
 - $Ax = b$, $b \neq 0$ antingen oändligt många lösningar, eller ingen lösning.
 - Baser, beroende, oberoende.
 - *Linjärkombination*: uttryck på formen

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_kv_k$$
 där $v_1, v_2, \dots, v_k$ är vektorer och $x_1, \dots, x_k$ skalärer.
 - *Linjärt oberoende*:

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_kv_k = 0$$
 endast om $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$.
 - *Linjärt beroende*: kan hitta $x_1, \dots, x_k$, ej alla lika med noll, så att

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_kv_k = 0.$$
 - Kolonnvektorer i en kvadratisk matris är oberoende $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.
 - *Bas* för $\mathbb{R}^n$: samling vektorer $v_1, v_2, \dots, v_k$ så att
 - * $v_1, v_2, \dots, v_k$ är *oberoende*.
 - * Alla $w \in \mathbb{R}^n$ kan skrivas som

$$w = x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_kv_k.$$
 ($x_1, x_2, \dots, x_k$ kallas *koordinater* för w i basen $v_1, \dots, v_k$.)
 - Om $v_1, v_2, \dots, v_n$ är *oberoende* vektorer i $\mathbb{R}^n$ bildar de en bas.
 - Inverser
 - Om A är kvadratisk matris och B är en matris så att $AB = BA = I$ (där I är identitetsmatrisen) är A *inverterbar*. Matrisen B skrivs oftast som A^{-1} .
 - A inverterbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.
 - Hur finna A^{-1} ? Ställ upp ekvationssystem $(A|I)$ och gör radoperationer tills du får $(I|B)$; B är då inversen till A .
 - $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

- Egenvärden/egenvektorer

- Om A är kvadratisk matris, $v \neq 0$ en vektor och $\lambda \in \mathbb{R}$ så att

$$Av = \lambda v$$

säger vi att v är en *egenvektor* till A med *egenvärdet* λ .

- Hur hitta egenvärden? Lös ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$.
- Hur hitta egenvektor? Om $\det(A - \lambda I) = 0$ så har $(A - \lambda I)x = 0$ icke-triviala lösningar - lös ekvationssystemet!
- När kan vi hitta bas av egenvektorer?
 - * Spektralsatsen: en $n \times n$ -matris A har n stycken ortogonala egenvektorer $\Leftrightarrow A^t = A$.
 - * Om $\det(A - \lambda I) = 0$ har n stycken olika lösningar för en $n \times n$ -matris A , så har A n stycken oberoende egenvektorer.
- Om $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k$ och $v_1, \dots, v_k$ är egenvektorer till en matris A , så är

$$A^n w = x_1 \lambda_1^n v_1 + x_2 \lambda_2^n v_2 + \dots + x_k \lambda_k^n v_k$$

- Följd: Om $\lambda_1 = 1$ och övriga egenvärden har belopp mindre än ett så är systemet *stabilt*, dvs $A^n w$ går mot $x_1 v_1$ då $n \rightarrow \infty$.

- Basbyten

- Låt $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ ("gamla bas") och $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ ("ny bas") vara baser för $\mathbb{R}^n$, med basbytesmatris P (dvs, $f = eP$.)
- *Koordinatvektorn* X_e för en vektor $x \in \mathbb{R}^n$ i basen e definieras av

$$x = eX_e$$

- Koordinatbyte: samband mellan koordinatvektorerna X_e och X_f ges av:

$$X_e = PX_f, \quad X_f = P^{-1}X_e$$

- Om e och f är ON-baser så är P en ON-matris, och således är $X_e = PX_f$, $X_f = P^t X_e$.
- Låt e vara bas för $\mathbb{R}^m$, och låt P vara basbytesmatrisen från standardbasen (för $\mathbb{R}^m$) till e . Låt f vara bas för $\mathbb{R}^n$, med basbytesmatris Q (från standardbasen för $\mathbb{R}^n$.) Om $y = Ax$ för en matris A , och koordinaterna X_e, Y_f för x, y ges av

$$x = PX_e, \quad y = QY_f$$

så gäller följande relation för de nya koordinaterna:

$$Y_f = A_{ef} X_e$$

där matrisen A_{ef} ges av

$$A_{ef} = Q^{-1}AP$$

- Specialfall: om $m = n$, $e = f$ (och därför $P = Q$) gäller:

$$Y_e = A_{ee} X_e$$

där

$$A_{ee} = P^{-1}AP$$

- Diagonalisering: givet kvadratisk matris A , hitta *diagonal* matris D och *inverterbar* matris P så att

$$A = PDP^{-1}$$

- Kan diagonalisera en $n \times n$ -matris $A \Leftrightarrow$ matrisen A har n oberoende egenvektorer.
 - Om $v_1, v_2, \dots, v_n$ är egenvektorer till A , med egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, så är $P = (v_1 v_2 \cdots v_n)$ och D är diagonalmatrisen med $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ på diagonalen.
- Om $A = PDP^{-1}$ så är $A^n = PD^nP^{-1}$. (Poäng: D^n lätt att beräkna.)