

Inlämningsuppgift 1

Lösningsförslag

1. Anta att vi bland talen $x_1, \dots, x_n$ har a tvåor och $n - a$ ettor. Då blir summan $x_1 + \dots + x_n$ lika med $(n - a) + 2a = n + a$. För att summan ska bli lika med k måste antalet tvåor alltså vara $a = k - n$. Antalet sätt att välja de $k - n$ positionerna där vi har en tvåa är $\binom{n}{k-n}$, vilket är det sökta svaret.

Kommentar. Det viktiga i denna uppgift är att inse att problemet kan tolkas som ett urvalsproblem och att svaret blir en binomialkoefficient. Jag har inte dragit av poäng för enkla räknefel av typen $k = n + a \Leftrightarrow a = n - k$. Detta kan dock komma att ge en poängs avdrag på tentamen.

2. (a) Plocka bort den översta klossen i ett torn av höjd $n \geq 3$. Om klossen har höjd 1 får vi ett torn av höjd $n - 1$. Ett sådant torn kan byggas på a_{n-1} sätt. Om klossen i stället har höjd 3 får vi ett torn av höjd $n - 3$. Ett sådant torn kan byggas på a_{n-3} sätt. Summering ger att

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-3}.$$

- (b) Vi ser att

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n \geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{n \geq 3} a_n x^n \\ &= 1 + x + x^2 + \sum_{n \geq 3} (a_{n-1} + a_{n-3}) x^n \\ &= 1 + x + x^2 + \sum_{n \geq 3} a_{n-1} x^{n-1} \cdot x + \sum_{n \geq 3} a_{n-3} x^{n-3} \cdot x^3 \\ &= 1 + x + x^2 + \sum_{m \geq 2} a_m x^m \cdot x + \sum_{m \geq 0} a_m x^m \cdot x^3 \\ &= 1 + x + x^2 + (f(x) - 1 - x) \cdot x + f(x) \cdot x^3 \\ &= 1 + f(x)(x + x^3) \\ &\iff f(x)(1 - x - x^3) = 1 \\ &\iff f(x) = \frac{1}{1 - x - x^3}. \end{aligned}$$

Kommentar. Några har varit lite slarviga med begynnelsetermerna vid beräkningen av den genererande funktionen. På en tentamen kan det bli någon poängs avdrag för den typen av slarv, även om det inte blev det här.

3. (a) Vi har att

$$\frac{F_{n-1}^2 - F_{n-2}^2}{F_{n-3}} = \frac{(F_{n-1} + F_{n-2})(F_{n-1} - F_{n-2})}{F_{n-3}} = \frac{F_n F_{n-3}}{F_{n-3}} = F_n.$$

(b) Metod I: Låt $r \geq 2$, och använd induktion i två steg över k . Då $k = 0$ har vi att

$$\begin{aligned} F_k F_{r-2} + F_{k+1} F_{r-1} &= F_0 F_{r-2} + F_1 F_{r-1} \\ &= F_{r-2} + F_{r-1} = F_r = F_{k+r}. \end{aligned}$$

$k = 1$ ger att

$$\begin{aligned} F_k F_{r-2} + F_{k+1} F_{r-1} &= F_1 F_{r-2} + F_2 F_{r-1} \\ &= F_{r-2} + 2F_{r-1} = F_{r-1} + F_r = F_{1+r} = F_{k+r}. \end{aligned}$$

Anta att $p \geq 2$ och att påståendet gäller då $k < p$. Låt $k = p$. Vi får att

$$\begin{aligned} F_{k+r} &= F_{(k-1)+r} + F_{(k-2)+r} = [\text{induktion}] \\ &= F_{k-1} F_{r-2} + F_{(k-1)+1} F_{r-1} = F_{k-2} F_{r-2} + F_{(k-2)+1} F_{r-1} \\ &= (F_{k-1} + F_{k-2}) F_{r-2} + (F_k + F_{k-1}) F_{r-1} \\ &= F_k F_{r-2} + F_{k+1} F_{r-1}. \end{aligned}$$

Induktion ger att påståendet gäller för alla $k \geq 0$.

Metod II: Låt $r \geq 2$, och använd induktion över k , men bara i ett steg. I bassteget $k = 0$ har vi att

$$\begin{aligned} F_k F_{r-2} + F_{k+1} F_{r-1} &= F_0 F_{r-2} + F_1 F_{r-1} \\ &= F_{r-2} + F_{r-1} = F_r = F_{k+r}. \end{aligned}$$

Anta att $p \geq 1$ och att påståendet gäller då $k < p$. Låt $k = p$. Vi får att

$$\begin{aligned} F_{k+r} &= F_{(k-1)+(r+1)} = [\text{induktion}] \\ &= F_{k-1} F_{(r+1)-2} + F_{(k-1)+1} F_{(r+1)-1} \\ &= F_{k-1} F_{r-1} + F_k F_r \\ &= (F_{k+1} - F_k) F_{r-1} + F_k (F_{r-1} + F_{r-2}) \\ &= F_{k+1} F_{r-1} + F_k F_{r-2}. \end{aligned}$$

Induktion ger att påståendet gäller för alla $k \geq 0$.

Kommentar. I den första metoden går induktionen i två steg, vilket innebär att man måste kontrollera påståendet för både $k = 0$ och $k = 1$. De som missat detta har ändå fått full poäng. Räkna dock med en poängs avdrag på en tentamen.

Det går även att räkna med den explicita formeln för Fibonaccitalen, vilket några studenter gjort. Detta är förstås helt i sin ordning.

- (c) Sätt $k = n - 1$ och $r = n + 1$. Eftersom $n \geq 1$ har vi att $k \geq 0$ och $r \geq 2$. Användning av (b) ger därmed att

$$\begin{aligned} F_{2n} &= F_{(n-1)+1}F_{(n+1)-1} + F_{n-1}F_{(n+1)-2} \\ &= F_nF_n + F_{n-1}F_{n-1} \\ &= F_n^2 + F_{n-1}^2. \end{aligned}$$

Kommentar. De flesta har satt $k = r = n$, vilket ger en något mer komplicerad lösning. Eftersom vi i (b) har att $r \geq 2$ bör man med denna metod egentligen kontrollera fallet $n = 1$, men de studenter som glömt detta har inte fått poängavdrag. På en tentamen drar jag bara poäng om ett bortglömt fall har betydande konsekvenser för uppgiften som helhet (exempelvis om fallet är basfallet i ett induktionsbevis). Det hade alltså blivit full poäng även på en tentamen.