

Inlämningsuppgift 1

Lämna in senast den 3 april klockan 23:59:59.

1. Låt k och n vara positiva heltal sådana att $n \leq k \leq 2n$. Beräkna antalet sätt att skriva talet k som en summa

$$k = x_1 + \cdots + x_n$$

sådan att varje term x_i är antingen 1 eller 2.

(3p)

2. Låt a_n vara antalet sätt att bygga ett torn av höjd n med byggklossar av höjd 1 och 3. Vi definierar $a_0 = 1$.

(a) Visa att $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$ för alla $n \geq 3$.

(2p)

(b) Låt

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

Visa att

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^3}.$$

(2p)

3. Låt $(F_0, F_1, F_2, F_3, \dots)$ vara Fibonacci-följden; $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ och $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ för $n \geq 2$.

(a) För $n \geq 3$, visa att

$$F_n = \frac{F_{n-1}^2 - F_{n-2}^2}{F_{n-3}}.$$

(1p)

(b) För $k \geq 0$ och $r \geq 2$, visa att $F_{k+r} = F_k F_{r-2} + F_{k+1} F_{r-1}$.

(1p)

(c) För $n \geq 1$, visa att $F_{2n} = F_{n-1}^2 + F_n^2$.

(1p)

Vänd på sidan för illustrerande exempel.

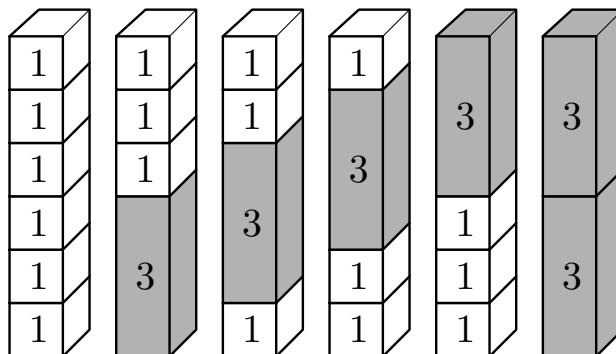
Illustrerande exempel:

1. För $n = 4$ och $k = 6$ har vi följande möjligheter:

$$\begin{aligned} 6 &= 1 + 1 + 2 + 2 &= 1 + 2 + 1 + 2 &= 2 + 1 + 1 + 2 \\ &= 1 + 2 + 2 + 1 &= 2 + 1 + 2 + 1 &= 2 + 2 + 1 + 1. \end{aligned}$$

Det sökta antalet i detta fall är alltså 6.

2. Vi har följande sex torn av höjd 6:



Alltså är $a_6 = 6$.

3. Vi har att $F_3 = 3$, $F_4 = 5$, $F_5 = 8$, $F_6 = 13$, $F_7 = 21$ och $F_8 = 34$ och $F_9 = 55$.

- (a) För $n = 6$ får vi

$$\frac{F_{n-1}^2 - F_{n-2}^2}{F_{n-3}} = \frac{F_5^2 - F_4^2}{F_3} = \frac{8^2 - 5^2}{3} = 13 = F_6 = F_n.$$

- (b) För $k = 4$ och $r = 5$ får vi identiteten

$$F_k F_{r-2} + F_{k+1} F_{r-1} = F_4 F_3 + F_5 F_4 = 5 \cdot 3 + 8 \cdot 5 = 55 = F_9 = F_{k+r}.$$

- (c) För $n = 4$ får vi identiteten

$$F_{n-1} F_{n-1} + F_n F_n = F_3 F_3 + F_5 F_5 = 3 \cdot 3 + 5 \cdot 5 = 34 = F_8 = F_{2n}.$$