

Inlämningsuppgift 2

Lösningsförslag

- Antalet partitioner sådana att den delmängd som innehåller elementet n har storlek minst 2 är lika med det totala antalet partitioner, det vill säga B_n , minus antalet partitioner som innehåller mängden $\{n\}$. Antalet partitioner av det sistnämnda slaget är B_{n-1} . Vi har nämligen en bijektion från mängden av partitioner av $\{1, \dots, n-1\}$ till mängden av partitioner av $\{1, \dots, n\}$ som innehåller mängden $\{n\}$. Denna bijektion ges av att addera mängden $\{n\}$ till en given partition av $\{1, \dots, n-1\}$. Alltså är $a_n = B_n - B_{n-1}$.
 - Antalet partitioner sådana att de två elementen $n-1$ och n inte tillhör samma delmängd är lika med B_n minus antalet partitioner sådana att $n-1$ och n tillhör samma mängd. Även här är antalet partitioner av det sistnämnda slaget lika med B_{n-1} , ty vi har än en gång en bijektion från mängden av partitioner av $\{1, \dots, n-1\}$. Denna bijektion ges av att placera elementet n i den mängd i partitionen som innehåller elementet $n-1$. Alltså är $a_n = B_n - B_{n-1}$.
- Vi tillämpar först RSK-algoritmen på permutationen

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 7 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vi skriver

$$\pi = \boxed{2} \boxed{4} \boxed{6} \boxed{7} \boxed{1} \boxed{5} \boxed{3}$$

I varje steg använder vi fet stil och understruket för att markera ändringar jämfört med föregående steg.

- Aktuellt element är 2. Par av tablåer efter instoppning av detta element:

$$\boxed{\underline{2}} \quad \boxed{\underline{1}}$$

Element kvar: $\boxed{4} \boxed{6} \boxed{7} \boxed{1} \boxed{5} \boxed{3}$

- Aktuellt element är 4. Par av tablåer efter instoppning av detta element:

$$\boxed{2} \boxed{\underline{4}} \quad \boxed{1} \boxed{\underline{2}}$$

Element kvar: $\boxed{6} \boxed{7} \boxed{1} \boxed{5} \boxed{3}$

- Aktuellt element är 6. Par av tablåer efter instoppning av detta element:

$$\boxed{2} \boxed{4} \boxed{\underline{6}} \quad \boxed{1} \boxed{2} \boxed{\underline{3}}$$

Element kvar: $\boxed{7} \boxed{1} \boxed{5} \boxed{3}$

4. Aktuellt element är 7. Par av tablåer efter instoppning av detta element:

2	4	6	<u>7</u>
1	2	3	<u>4</u>

Element kvar:

1	5	3
---	---	---

5. Aktuellt element är 1. Par av tablåer efter instoppning av detta element:

<u>1</u>	4	6	7
<u>2</u>			
1	2	3	4
<u>5</u>			

Element kvar:

5	3
---	---

6. Aktuellt element är 5. Par av tablåer efter instoppning av detta element:

1	4	<u>5</u>	7
2	<u>6</u>		
1	2	3	4
5	<u>6</u>		

Element kvar:

3

7. Aktuellt element är 3. Par av tablåer efter instoppning av detta element:

1	<u>3</u>	5	7
2	<u>4</u>		
<u>6</u>			
1	2	3	4
5	6		
<u>7</u>			

Detta är det sökta paret av tablåer.

Studera nu

$$\pi^2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 4 & 7 & 5 & 3 & 2 & 1 & 6 \\ \hline \end{array}$$

Samma procedur som för π ger följande par av tablåer:

1	5	6
2		
3		
4		
7		
1	2	7
3		
4		
5		
6		

Nästa permutation att studera är

$$\pi^3 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 7 & 3 & 1 & 6 & 4 & 2 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Denna gång får vi följande par av tablåer:

1	2	5
3	4	
6		
7		
1	4	7
2	5	
3		
6		

För π^4 , π^5 och π^6 kan vi använda oss av att om σ ger paret (S, T) , så ger σ^{-1} paret (T, S) . Eftersom π^7 är identiteten erhåller vi att $\pi^4 = (\pi^3)^{-1}$, $\pi^5 = (\pi^2)^{-1}$ och $\pi^6 = \pi^{-1}$. Paret av tablåer som svarar mot π^4 är alltså

1	4	7
2	5	
3		
6		
1	2	5
3	4	
6		
7		

Paret som svarar mot π^5 är

1	2	7		1	5	6
3				2		
4				3		
5				4		
6				7		

Paret som svarar mot π^6 är

1	2	3	4	1	3	5	7
5	6			2	4		
7				6			

Slutligen har vi som sagt att π^7 är identiteten, vilket ger att paret av tablåer blir

1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

3. (a) Låt $n \geq 2$. För en permutation π , studera cykeln som innehåller elementet n . Vi har två fall:

- * Cykeln har längd 2 och är alltså på formen (k, n) för något $k \in \{1, \dots, n\}$. Tar vi bort cykeln (k, n) från cykeluppdelningen av π får vi en permutation på mängden $\{1, \dots, n-1\} \setminus \{k\}$ med egenskapen att alla cykler har längd 2 eller 3. Det finns a_{n-2} sådana cykler, och vi kan välja k på $n-1$ olika sätt. Alltså kan vi välja π på totalt $(n-1)a_{n-2}$ sätt i detta fall.
- * Cykeln har längd 3 och är alltså på formen (j, k, n) för två olika element $j, k \in \{1, \dots, n\}$. Tar vi bort cykeln (j, k, n) får vi en permutation på mängden $\{1, \dots, n-1\} \setminus \{j, k\}$ med egenskapen att alla cykler har längd 2 eller 3. Det finns a_{n-3} sådana cykler, och vi kan välja j och k på $(n-1)(n-2)$ olika sätt; notera att ordningen spelar roll. I detta fall har vi alltså $(n-1)(n-2)a_{n-3}$ olika sätt att välja π .

Summering ger att

$$a_n = (n-1)a_{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-3}.$$

- (b) Vi har att

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = a_1 + a_2 x + \sum_{n \geq 3} a_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\
 &= x + \sum_{n \geq 3} ((n-1)a_{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-3}) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\
 &= x + \sum_{n \geq 3} a_{n-2} \frac{x^{n-1}}{(n-2)!} + \sum_{n \geq 3} a_{n-3} \frac{x^{n-1}}{(n-3)!} \\
 &= x + x \sum_{m \geq 1} a_m \frac{x^m}{m!} + x^2 \sum_{m \geq 0} a_m \frac{x^m}{m!} \\
 &= x + x(f(x) - 1) + x^2 f(x) = (x + x^2)f(x).
 \end{aligned}$$

- (c) Vi behöver kontrollera att $f(x) = e^{x^2/2+x^3/3}$ är en lösning till differentialekvationen i (b) och att randvillkoret $f(0) = a_0$ är uppfyllt. Vi ser att detta gäller, ty

$$f'(x) = D(e^{x^2/2+x^3/3}) = (x+x^2)e^{x^2/2+x^3/3} = (x+x^2)f(x),$$

$$\text{och } f(0) = e^0 = 1 = a_0.$$

(Några detaljer, som inte krävs för full poäng på uppgiften: Vi kan skriva differentialekvationen som $g'(x) = x+x^2$, där $g(x) = \log |f(x)|$. Enligt integralkalkylens huvudsats ges alla lösningar till denna ekvation av $g(x) = \int (x+x^2)dx + C = x^2/2 + x^3/3 + C$.)

Frivilligt bonusproblem. Vi kan först notera att $A_n = 0$ då n är udda, vilket innebär att det räcker med att studera jämna n . Låt $n \geq 2$, och skriv $n = 2m$. I en given partition av $\{1, \dots, 2m\}$, studera den mängd X som innehåller elementet $2m$. Enligt antagandet har X ett jämnt antal element, säg $2k$. Om vi låter k vara fixerat kan vi välja elementen i $X \setminus \{2m\}$ på $\binom{2m-1}{2k-1}$ olika sätt. Tar vi bort mängden X får vi en partition av en mängd med $2m-2k$ element sådan att alla delmängder innehåller ett jämnt antal element. Antalet sådana partitioner är A_{2m-2k} . Summering över k ger att

$$A_{2m} = \sum_{k=1}^m \binom{2m-1}{2k-1} A_{2m-2k} = \sum_{k=1}^m \binom{2m-1}{2m-2k} A_{2m-2k} = \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m-1}{2j} A_{2j}$$

Vi ska studera

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} A_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{m \geq 0} A_{2m} \frac{x^{2m}}{(2m)!}.$$

Ovanstående rekursion ger att

$$\begin{aligned} f(x) &= A_0 + \sum_{m \geq 1} A_{2m} \frac{x^{2m}}{(2m)!} \\ &= 1 + \sum_{m \geq 1} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m-1}{2j} A_{2j} \frac{x^{2m}}{(2m)!} \\ &= 1 + \sum_{j \geq 0} \sum_{m \geq j+1} \frac{A_{2j}}{(2j)!(2m-2j-1)!} \cdot \frac{x^{2m}}{2m}. \end{aligned}$$

Derivering ger att

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \sum_{j \geq 0} \sum_{m \geq j+1} \frac{A_{2j}}{(2j)!(2m-2j-1)!} \cdot x^{2m-1} \\ [i = m-j] &= \sum_{j \geq 0} \sum_{i \geq 1} \frac{A_{2j}}{(2j)!(2i-1)!} \cdot x^{2i+2j-1} \\ &= \sum_{j \geq 0} \frac{A_{2j} x^{2j}}{(2j)!} \sum_{i \geq 1} \frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!} = f(x) \sinh x. \end{aligned}$$

Vi ser att $f(x) = e^{\cosh x - 1}$ är en lösning till denna ekvation som uppfyller $f(0) = 1$. Detta är alltså den sökta lösningen, vilket avslutar beviset. (Jämför med 3(c) ovan.)