

Inlämningsuppgift 2

Lämna in senast den 21 april klockan 23:59:59.

Denna inlämningsuppgift innehåller tre ordinarie problem och ett extra bonusproblem. Bonusproblemet har en extra hög svårighetsgrad och är helt frivillig. Lyckas du lösa bonusproblemet får du automatiskt maximala tio poäng. Du får dock inga delpoäng för partiella resultat, vilket du däremot kan få på de vanliga problemen.

1. (a) För $n \geq 2$, låt a_n vara antalet partitioner av mängden $\{1, \dots, n\}$ sådana att den delmängd som innehåller elementet n har storlek minst 2 (och alltså innehåller minst ett element utöver elementet n). Visa att

$$a_n = B_n - B_{n-1},$$

där B_n är det n :te Belltalet.

(1p)

- (b) Låt nu istället a_n vara antalet partitioner av mängden $\{1, \dots, n\}$ sådana att de två elementen $n-1$ och n inte tillhör samma delmängd. Visa att vi än en gång har att $a_n = B_n - B_{n-1}$.

(1p)

2. Låt

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 7 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = (1, 2, 4, 7, 3, 6, 5).$$

Bestäm de sju par av tablåer som svarar mot de sju permutationerna

$$\pi, \pi^2, \pi^3, \pi^4, \pi^5, \pi^6, \pi^7$$

under RSK-korrespondensen. (Det är tillåtet att använda satser från boken för att förenkla uträkningarna.)

(4p)

3. Låt a_n vara antalet permutationer på $\{1, \dots, n\}$ sådana att samtliga cykler har längd 2 eller 3. Vi definierar $a_0 = 1$.

- (a) Visa att talföljden $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ uppfyller rekursionen

$$a_n = (n-1)a_{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-3}.$$

(1p)

(b) Låt

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$$

vara den exponentiellt genererande funktionen för talföljden. Visa att

$$f'(x) = (x + x^2)f(x),$$

där $f'(x)$ är derivatan av $f(x)$.

(2p)

(c) Visa att $f(x) = e^{x^2/2+x^3/3}$, där $f(x)$ är funktionen definierad i (b).

(1p)

Illustrerande exempel:

1. Låt $n = 4$. Skriv en mängd $\{a_1, \dots, a_r\}$ som ett ord $a_1 \cdots a_r$.

(a) I följande partitioner har 4 sällskap av minst ett till element:

$$\{1, 2, 34\}, \{1, 3, 24\}, \{2, 3, 14\}, \{12, 34\}, \{13, 24\}, \{23, 14\}, \\ \{1, 234\}, \{2, 134\}, \{3, 124\}, \{1234\}.$$

(b) I följande partitioner tillhör 3 och 4 olika delmängder:

$$\{1, 2, 3, 4\}, \{12, 3, 4\}, \{1, 23, 4\}, \{1, 3, 24\}, \{2, 13, 4\}, \{2, 3, 14\}, \\ \{123, 4\}, \{13, 24\}, \{23, 14\}, \{3, 124\}.$$

3. För $n = 8$ har vi dels permutationer med cykelstrukturen $3+3+2$, alltså en cykeluppdelning på formen $(a, b, c)(d, e, f)(g, h)$, och dels permutationer med cykelstrukturen $2+2+2+2$, alltså en cykeluppdelning på formen $(a, b)(c, d)(e, f)(g, h)$. Enligt den avslutande propositionen i avsnitt 13.1 finns det $\frac{8!}{3^2 \cdot 2! \cdot 2 \cdot 1!} = 1120$ permutationer av den första typen och $\frac{8!}{2^4 \cdot 4!} = 105$ permutationer av den andra typen, alltså totalt 1225 permutationer.

Frivilligt bonusproblem. Låt A_n vara antalet partitioner av mängden $\{1, \dots, n\}$ sådana att varje delmängd har ett jämnt antal element; vi definierar $A_0 = 1$. Visa att

$$\sum_{n \geq 0} A_n \frac{x^n}{n!} = e^{\cosh x - 1},$$

där $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Exempel: För $n = 4$ har vi partitionerna

$$\{1234\}, \{12, 34\}, \{13, 24\}, \{14, 23\},$$

vilket innebär att $A_4 = 4$.