

Inlämningsuppgift 3

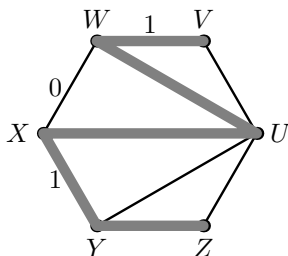
Lösningsförslag

1. (a) Eftersom vi vill att T ska vara ett minimalt uppspännande träd måste följande egenskap vara uppfylld för varje kant e utanför T :

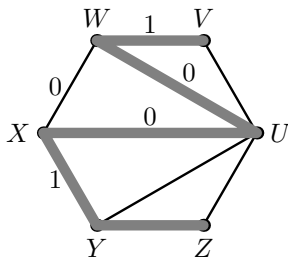
* I den unika cykeln i $T + e$ måste vikten för e vara större än eller lika med vikten för alla andra kanter i cykeln.

(Anta nämligen att det finns en kant e' i cykeln med strikt större vikt än e . Då är $(T + e) - e'$ ett uppspännande träd med strikt lägre vikt än T .)

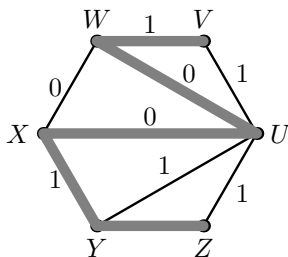
Använd beteckningar som i följande figur:



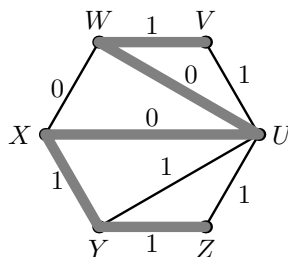
Studera först kanten (X, W) . Denna kant bildar en cykel med kanterna (U, W) och (U, X) från trädets T . Enligt ovanstående egenskap måste vikten för (X, W) vara större än eller lika med vikten för kanterna (U, W) och (U, X) . Den enda möjligheten är att båda dessa kanter har vikten 0:



Studera nu kanten (U, V) , som bildar en cykel med kanterna (U, W) och (V, W) . Eftersom (V, W) har vikten 1 måste även (U, V) ha vikten 1. Samma resonemang ger att (U, Y) och (U, Z) har vikten 1:



Notera slutligen att T ska ha totalvikt 3. Detta innebär att kanten (Y, Z) måste ha vikten 1. Den sökta tilldelningen av vikter ser alltså ut på följande sätt:



Alla vikter är alltså entydigt bestämda av förutsättningarna. I synnerhet är denna tilldelning av vikter den enda som har de önskade egenskaperna.

För att se att T verkligen är minimalt kan man notera att inget uppspannande träd innehåller fler än två kanter med vikten 0, ty de tre kanterna med vikten 0 bildar en cykel. Alltså har varje uppspannande träd minst tre kanter med vikten 1 och alltså totalvikt minst 3.

- (b) Nej, alla kanter är med i något minimalt uppspannande träd. Vi kan nämligen observera följande:
- * Vi kan byta ut kanten (X, Y) mot antingen (U, Y) eller (U, Z) och fortfarande ha ett minimalt träd.
 - * Vi kan byta ut (V, W) mot (U, V) och fortfarande ha ett minimalt träd.
 - * Vi kan byta ut (U, W) mot (W, X) och fortfarande ha ett minimalt träd.

2. (a) Låt V vara grafens hörnmängd, och låt W vara mängden av hörn som tillhör någon kant i matchningen X . Notera att $|W| = 2|X|$. För varje hörn $v \in V \setminus W$, låt e_v vara en kant i G där v ingår (en sådan kant existerar enligt förutsättningarna). Den andra ändpunkten till e_v måste vara ett hörn i W , ty annars skulle $X \cup \{e_v\}$ vara en matchning med fler kanter än X . I synnerhet är alla kanter i mängden $\{e_v : v \in V \setminus W\}$ olika. Definiera

$$Y = X \cup \{e_v : v \in V \setminus W\}.$$

Detta är en hörntäckning av G , ty kanterna i X täcker hörnen i W , medan de övriga kanterna täcker hörnen i $V \setminus W$. Vi konstaterar att

$$\begin{aligned} |Y| &= |X| + |\{e_v : v \in V \setminus W\}| = |X| + |V \setminus W| \\ &= |X| + n - |W| = |X| + n - 2|X| = n - |X|. \end{aligned}$$

- (b) Först visar vi att Y är en skog, alltså cykelfri. Anta nämligen att Y innehåller en cykel. Varje hörn i cykeln finns med i minst två kanter. I synnerhet kan vi ta bort valfri kant från cykeln och fortfarande ha en hörntäckning.

Låt k vara antalet sammanhängande komponenter i skogen Y . Vi har då att $|Y| = n - k$ (Sats 11.2.1 (b) i Cameron). Vi kan bilda en matchning X genom att välja en kant från varje komponent, alltså k kanter. Varje komponent innehåller nämligen minst en kant, ty ingen komponent består av ett isolerat hörn. Vi ser att

$$|X| = k = n - |Y|.$$

(Det är möjligt att lösa uppgiften utan att använda Sats 11.2.1(b).)

(c) Enligt (a) har vi att

$$h \leq n - m \iff h + m \leq n,$$

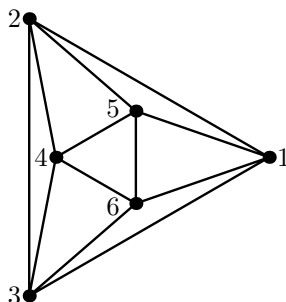
medan (b) medför att

$$m \geq n - h \iff h + m \geq n.$$

Alltså har vi att $h + m = n$.

3. (Det finns massvis med sätt att lösa denna uppgift, och den här lösningen är inte nödvändigtvis den mest eleganta.)

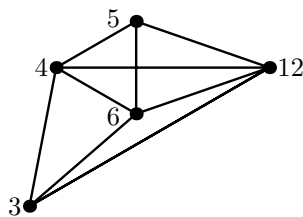
Låt G beteckna grafen, som alltså ser ut så här:



Låt e vara kanten $(1, 2)$. Vi har att

$$f_G(r) = f_{G-e}(r) - f_{G/e}(r). \quad (1)$$

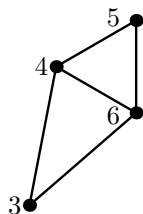
Vi noterar att $H_1 = G/e$ har följande utseende:



Eftersom hörnet 12 är granne med alla andra hörn har vi att

$$f_{H_1}(r) = r \cdot f_{H'_1}(r - 1),$$

där H'_1 är den graf som erhålls om vi plockar bort hörnet 12 från H_1 :



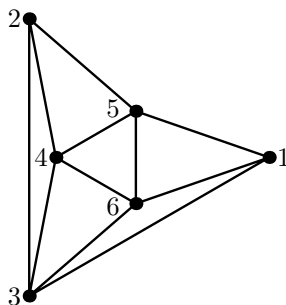
Med hjälp av exempelvis övningsuppgift 18 i Häfte III inser man att

$$f_{H'_1}(r) = r(r-1)(r-2)^2.$$

Alltså är

$$f_{G/e}(r) = f_{H_1}(r) = r \cdot f_{H'_1}(r-1) = r(r-1)(r-2)(r-3)^2. \quad (2)$$

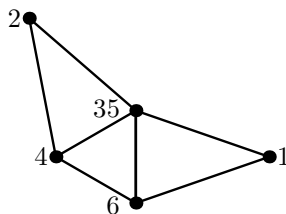
Det som återstår är att beräkna $f_{H_2}(r)$, där $H_2 = G - e$. Denna graf ser ut så här:



Man kan nu fortsätta på samma sätt med kanten $(1, 3)$ och räkna på. En variant som går något snabbare är att göra på följande sätt. Låt e' vara kanten $(3, 5)$. Denna kant finns inte med i H_2 , så vi har att

$$f_{G-e}(r) = f_{H_2}(r) = f_{H_2+e'}(r) + f_{(H_2+e')/e'}(r). \quad (3)$$

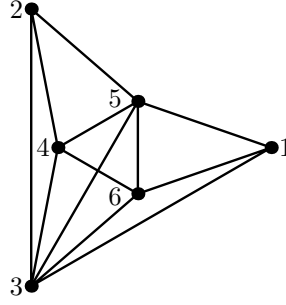
Notera att $H_3 = (H_2 + e')/e'$ är följande graf:



Alltså är

$$f_{(H_2+e')/e'}(r) = f_{H_3}(r) = r(r-1)(r-2)^3. \quad (4)$$

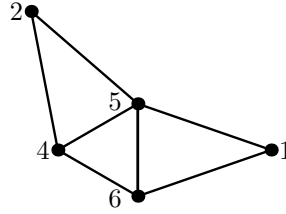
Vidare är $H_4 = H_2 + e'$ följande graf:



Eftersom hörnet 3 är granne med alla andra hörn har vi att

$$f_{H_4}(r) = r \cdot f_{H'_4}(r-1),$$

där H'_4 är den graf som erhålls om vi plockar bort hörnet 3 från H_4 :



Detta är samma graf som H_3 , vilket innebär att

$$f_{H_2+e'}(r) = f_{H_4}(r) = rf_{H_3}(r-1) = r(r-1)(r-2)(r-3)^3. \quad (5)$$

Stoppar vi in (4) och (5) i (3) får vi att

$$\begin{aligned} f_{G-e}(r) &= f_{H_2}(r) = f_{H_4}(r) + f_{H_3}(r) \\ &= r(r-1)(r-2)(r-3)^3 + r(r-1)(r-2)^3 \\ &= r(r-1)(r-2)((r-3)^3 + (r-2)^2) \\ &= r(r-1)(r-2)(r^3 - 8r^2 + 23r - 23). \end{aligned}$$

Stoppar vi sedan in detta och (2) i (1) erhåller vi att

$$\begin{aligned} f_G(r) &= f_{G-e}(r) - f_{G/e}(r) \\ &= r(r-1)(r-2)(r^3 - 8r^2 + 23r - 23) - r(r-1)(r-2)(r-3)^2 \\ &= r(r-1)(r-2)(r^3 - 8r^2 + 23r - 23 - (r-3)^2) \\ &= r(r-1)(r-2)(r^3 - 9r^2 + 29r - 32). \end{aligned}$$

Observera att detta är lika med

$$r^6 - 12r^5 + 58r^4 - 137r^3 + 154r^2 - 64r$$

och

$$r(r-1)(r^5 - 11r^4 + 47r^3 - 90r^2 + 64).$$

Jag återkommer senare med en lösning på bonusproblemet. Talet t är lika med antalet trianglar i G , alltså antalet hörnmängder $\{u, v, w\}$ sådana att (u, v) , (u, w) och (v, w) alla är kanter i G . Detta kan visas med hjälp av induktion och formeln $f_G(r) = f_{G-e}(r) - f_{G/e}(r)$. Som en student visade kan man även använda inklusion och exklusion på ett sinnrikt sätt (se kapitel 5 i Cameron, ett kapitel som inte ingår i kursen).