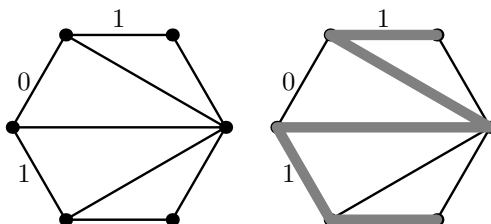


Inlämningsuppgift 3

Lämna in senast den 8 maj klockan 23:59:59.

Även denna gång består inlämningsuppgiften av tre ordinarie problem och ett extra bonusproblem. Bonusproblemet är helt frivilligt, men lyckas du lösa det får du automatiskt maximala tio poäng. Du får dock inga delpoäng för partiella resultat, vilket du däremot kan få på de vanliga problemen.

1. Låt G vara grafen till vänster i figuren, och låt T vara det uppspännande trädet som är markerat med tjocka gråa kanter i bilden till höger.



- (a) Som synes är tre av kanterna försedda med varsin vikt, antingen 0 eller 1. Man vill ge var och en av de övriga kanterna i G vikten 0 eller 1 så att T blir ett *minimalt* uppspännande träd med totalvikt 3. Visa att detta kan åstadkommas på precis ett sätt.
- (b) Låt kantvikterna vara definierade som i (a). Finns det någon kant i G som inte är med i något minimalt uppspännande träd i G ?

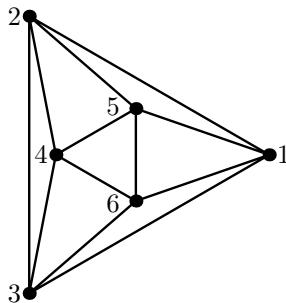
(3p)

2. Låt G vara en graf med n hörn sådan att varje hörn är med i minst en kant. En kantmängd X är en *matchning* i G om varje hörn finns med i *högst* en kant i X . En kantmängd Y är en *hörntäckning* av G om varje hörn finns med i *minst* en kant i Y .

- (a) Låt X vara en matchning av maximal storlek. Visa att X kan utvidgas till en hörntäckning av G med $n - |X|$ element.
- (b) Låt Y vara en hörntäckning av minimal storlek. Visa att Y är en skog och att Y innehåller en matchning med $n - |Y|$ element.
- (c) Låt h vara minsta möjliga storlek på en hörntäckning av G , och låt m vara största möjliga storlek på en matchning i G . Visa att $h + m = n$.

(3p)

3. Beräkna det kromatiska polynomet för följande graf:



(4p)

Frivilligt bonusproblem. Låt G vara en graf på n hörn, och låt

$$f_G(r) = r^n - a_{n-1}r^{n-1} + a_{n-2}r^{n-2} - a_{n-3}r^{n-3} + \dots$$

vara det kromatiska polynomet för G .

(a) Visa att koefficienten a_{n-1} framför r^{n-1} är lika med antalet kanter i G .

(b) Definiera

$$t = \binom{a_{n-1}}{2} - a_{n-2}.$$

Talet t är lika med antalet förekomster i G av en viss delgraf. Ange denna delgraf, och bevisa påståendet.

Exempel: För den kompletta grafen K_5 har vi att

$$f_{K_5}(r) = r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4) = r^5 - 10r^4 + 35r^3 - 50r^2 + 24r.$$

Eftersom $a_{n-1} = a_4 = 10$ och $a_{n-2} = a_3 = 35$ får vi att

$$t = \binom{10}{2} - 35 = 10.$$