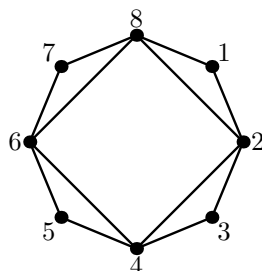


Inlämningsuppgift 4

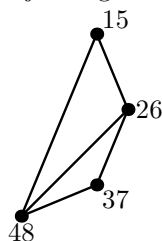
Lösningsförslag

1. (a) Färga först den inre kvadraten. Detta kan göras på $r(r-1)(r^2-3r+3)$ olika sätt. För vart och ett av de återstående hörnen finns $r-2$ möjliga färgningar, ty varje hörn har två redan färgade grannar som måste ha olika färg. Multiplikation ger att antalet färgningar är $r(r-1)(r^2-3r+3)(r-2)^4$, vilket per definition är lika med $f_G(r)$.
- (b) Numrera hörnen på följande sätt:



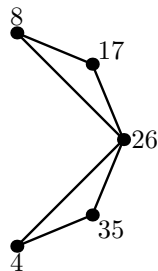
Låt oss först beräkna G/π och $f_{G/\pi}(r)$ (se avsnitt 4 i häfte IV) för varje gruppelment π i D_4 .

- * Identiteten. I detta fall blir $G/\pi = G$, vilket ger att $f_{G/\pi}(r) = r(r-1)(r-2)^4(r^2-3r+3)$.
- * Rotation $\pm 90^\circ$ (2 element). Cykeluppdelningen av π är då antingen $(1, 3, 5, 7)(2, 4, 6, 8)$ eller $(1, 7, 5, 3)(2, 8, 6, 4)$. Eftersom exempelvis 2 och 4 är sammanbundna innehåller G/π en ögla, vilket innebär att $f_{G/\pi}(r) = 0$.
- * Rotation 180° . Cykeluppdelningen blir $(1, 5)(2, 6)(3, 7)(4, 8)$. Vi ser att G/π är lika med följande graf:



Alltså är $f_{G/\pi}(r) = r(r-1)(r-2)^2$.

- * Spegling i vertikal eller horisontell linje (2 element). Cykeluppdelningen av π är då antingen $(4)(8)(1, 7)(2, 6)(3, 5)$ eller $(2)(6)(1, 3)(4, 8)(5, 7)$. I det första fallet är G/π lika med följande graf:



Alltså är $f_{G/\pi}(r) = r(r-1)^2(r-2)^2$. Vi får samma kromatiska polynom i det andra fallet.

* Spegling i diagonal (2 element). Cykeluppdelningen av π är då antingen $(1)(5)(2,8)(3,7)(4,6)$ eller $(3)(7)(1,5)(2,4)(6,8)$. Eftersom $(2,4), (4,6), (6,8), (2,8)$ är kanter innehåller G/π en ögla i bägge fallen, vilket innebär att $f_{G/\pi}(r) = 0$.

Antalet omärkta färgningar är därmed

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{|D_4|} \sum_{\pi \in D_4} f_{G/\pi}(r) \\
&= \frac{1}{8} (r(r-1)(r-2)^4(r^2-3r+3) + r(r-1)(r-2)^2 \\
&\quad + 2r(r-1)^2(r-2)^2) \\
&= \frac{r(r-1)(r-2)^2}{8} ((r-2)^2(r^2-3r+3) + 1 + 2(r-1)) \\
&= \frac{r(r-1)(r-2)^2(r^4-7r^3+19r^2-22r+11)}{8}.
\end{aligned}$$

2. Vi använder cykelindexsatsen. Eftersom ljusstaken är kvadratisk kan den roteras på fyra olika sätt, vilket innebär att det är den cykliska gruppen C_4 som verkar på ljusstaken. Vi har följande gruppelament:

- * Identiteten. Vi får åtta cykler med vardera åtta element, vilket ger cykelindex s_1^8 .
- * Rotation $\pm 90^\circ$ (2 element). Vi får två cykler med vardera fyra element, vilket ger cykelindex s_4^2 .
- * Rotation 180° . Vi får fyra cykler med vardera två element, vilket ger cykelindex s_2^4 .

Cykelindexet för hela gruppen blir därmed

$$Z(C_4; s_1, \dots, s_8) = \frac{1}{4}(s_1^8 + 2s_4^2 + s_2^4).$$

Enligt cykelindexsatsen ges antalet banor av placeringar med k ljus av koefficienten framför t^k i polynomet

$$\begin{aligned} & Z(C_4; 1+t, 1+t^2, \dots, 1+t^8) \\ &= \frac{1}{4}((1+t)^8 + 2(1+t^4)^2 + (1+t^2)^4) \\ &= \frac{1}{4}(4 + 8t + 32t^2 + 56t^3 + 80t^4 + 56t^5 + 32t^6 + 8t^7 + 4t^8) \\ &= 1 + 2t + 8t^2 + 14t^3 + 20t^4 + 14t^5 + 8t^6 + 2t^7 + t^8. \end{aligned}$$

3. (a) En kod är e -rättande om och endast om avståndet mellan varje par av olika kodord är minst $2e + 1$. I vårt fall är $e = 1$, vilket innebär att vi ska visa att alla avstånd är minst 3. En direkt kontroll av alla tio par visar att så är fallet.
- (b) Vi rättar felen och erhåller följande:

111000	110110	100000	010111	011011	000000	100010
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
111000	100110	000000	010101	001011	000000	100110
B	R	A	S	V	A	R

- (c) $X = 111111$ är ett exempel på ett ord som fungerar. Eftersom alla andra kodord innehåller minst tre nollor är nämligen avståndet från X till varje annat kodord minst tre.