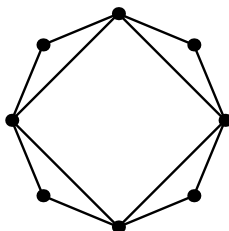


### Inlämningsuppgift 4

**Lämna in senast den 22 maj klockan 23:59:59.**

Det blir inget bonusproblem den här gången. Glöm inte bort att du kan få delpoäng på ett problem även om du inte har lyckats lösa problemet fullständigt.

1. Låt  $G$  vara grafen i nedanstående figur.



Automorfigruppen till  $G$  är den dihedrala gruppen  $D_4$ , som verkar på  $G$  genom rotation och spegling (detta behöver du inte visa).

- (a) Visa att

$$f_G(r) = r(r-1)(r-2)^4(r^2-3r+3),$$

där  $f_G(r)$  är det kromatiska polynomet till  $G$ , alltså antalet sätt att färga  $G$  med färgerna  $1, \dots, r$  så att sammanbundna hörn har olika färg.

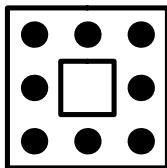
(1p)

- (b) Låt  $\tilde{f}_G(r)$  vara det omärkta kromatiska polynomet till  $G$ . (För ett givet  $r$  är alltså värdet  $\tilde{f}_G(r)$  lika med antalet ekvivalensklasser av tillåtna hörnfärgningar med färgerna  $1, \dots, r$ , där två färgningar betraktas som ekvivalenta om det finns en automorfi som avbildar den ena färgningen på den andra.) Visa att

$$\tilde{f}_G(r) = \frac{r(r-1)(r-2)^2(r^4-7r^3+19r^2-22r+11)}{8}.$$

(3p)

2. Nedanstående figur föreställer en ljusstake med plats för ljus i de åtta markerade svarta hålen.



För  $0 \leq k \leq 8$ , beräkna antalet sätt att placera ljus i exakt  $k$  av hålen. Två placeringar betraktas som identiska om vi kan rotera ljusstaken så att den ena placeringen övergår i den andra. Observera att vi inte kan vända ljusstaken upp och ner.

(3p)

3. Låt  $C$  vara den binära kod av längd 6 som består av följande fem ord:

$$A = 000000, B = 111000, R = 100110, S = 010101, V = 001011.$$

- (a) Visa att  $C$  är 1-rättande.

(1p)

- (b) Vid en överföring av ett meddelande bestående av sju kodord blev det mottagna resultatet

$$111000 \ 110110 \ 100000 \ 010111 \ 011011 \ 000000 \ 100010.$$

Högst en bit i varje överfört ord var felaktig. Bestäm de sju ursprungliga kodorden.

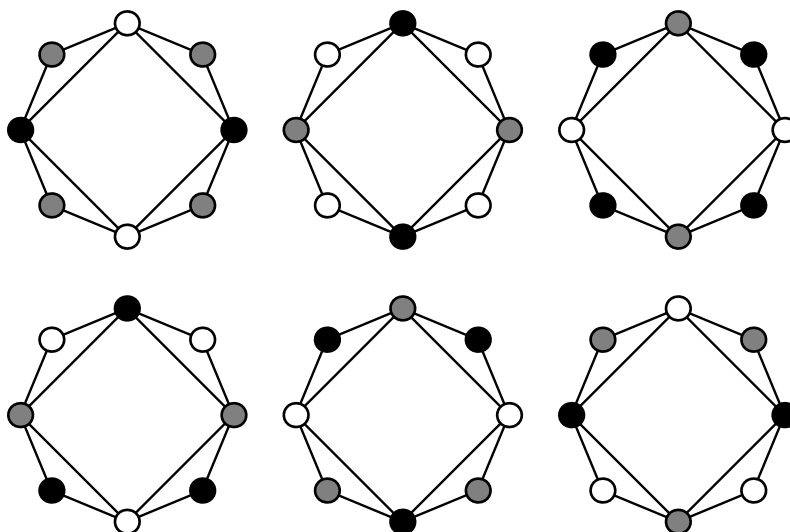
(1p)

- (c) Hitta ett binärt ord  $X$  av längd 6 så att  $C \cup \{X\} = \{A, B, R, S, V, X\}$  fortfarande är en 1-rättande kod.

(1p)

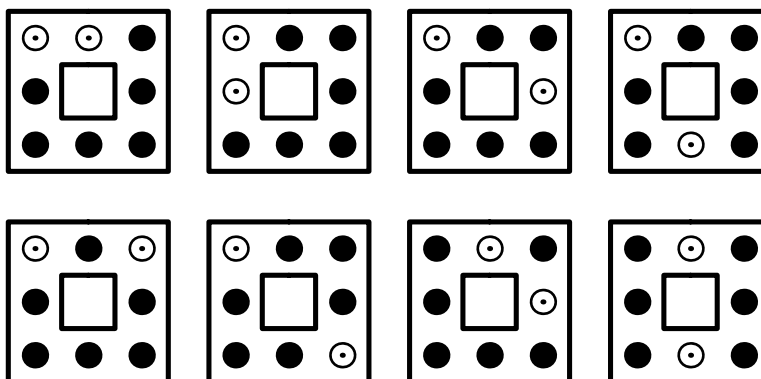
Illustrerande exempel:

1. (b) Vi kan färga  $G$  med färgerna vitt, grått och svart på följande sex sätt:



I synnerhet är  $\tilde{f}_G(3) = 6$ .

2. För  $k = 2$  har vi följande åtta möjligheter:



Observera att de två konfigurationerna längst till vänster på övre raden betraktas som olika, ty vi får bara rotera ljusstaken, inte vända den upp och ner. Detsamma gäller de två konfigurationerna längst till höger på samma rad.