

Lösningssförslag till övningsuppgifter, del II

Obs! Preliminär version!

Ö.1. För varje delare d till n , låt A_d var mängden av element a sådana att $\gcd(a, n) = d$. Partitionen ges av

$$\{A_d : d \text{ delar } n\}.$$

- $n = 6$: $A_1 = \{1, 5\}$, $A_2 = \{2, 4\}$, $A_3 = \{3\}$, vilket ger partitionen

$$\{\{1, 5\}, \{2, 4\}, \{3\}\}.$$

- $n = 11$: Alla element ligger i A_1 , vilket ger partitionen

$$\{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}\}.$$

- $n = 12$: $A_1 = \{1, 5, 7, 11\}$, $A_2 = \{2, 10\}$, $A_3 = \{3, 9\}$, $A_4 = \{4, 8\}$ och $A_6 = \{6\}$, vilket ger partitionen

$$\{\{1, 5, 7, 11\}, \{2, 10\}, \{3, 9\}, \{4, 8\}, \{6\}\}.$$

- $n = 16$: $A_1 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$, $A_2 = \{2, 6, 10, 14\}$, $A_4 = \{4, 12\}$ och $A_8 = \{8\}$, vilket ger partitionen

$$\{\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}, \{2, 6, 10, 14\}, \{4, 12\}, \{8\}\}.$$

Ö.2. Längden på cykeln som innehåller elementet $(0, 0)$ är lika med det största positiva elementet k som har egenskapen att $\pi^k(0, 0) = (0, 0)$. Nu är

$$\pi^k(0, 0) = (k \bmod m, k \bmod n),$$

vilket innebär att $\pi^k(0, 0) = (0, 0)$ om och endast om k är delbart med såväl m som n . Det minsta k som uppfyller detta är

$$k = \text{lcm}(m, n) = \frac{mn}{\gcd(m, n)}.$$

Om $\gcd(m, n) = 1$ är $k = mn$, vilket innebär att π är en cyklisk permutation; antalet element i X är mn . Om $\gcd(m, n) > 1$ är $k < mn$, vilket innebär att π inte är en cyklisk permutation.

Ö.3. (Uppdaterad den 8 april.)

(a) Vi har att

$$\begin{aligned}\pi_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 2 & 5 & 8 & 11 & 1 & 4 & 7 & 10 \end{pmatrix} \\ &= (1, 3, 9)(2, 6, 5)(4, 12, 10)(7, 8, 11)\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}\pi_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 10 & 2 & 7 & 12 & 4 & 9 & 1 & 6 & 11 & 3 & 8 \end{pmatrix} \\ &= (1, 5, 12, 8)(2, 10, 11, 3)(4, 7, 9, 6).\end{aligned}$$

(b) Vi observerar att vi har cykeluppdelningen för π_5 i raderna och cykeluppdelningen för π_3 i kolumnerna. Vi kan nämligen skriva

$$(1, 3, 9)(2, 6, 5)(4, 12, 10)(7, 8, 11) = (1, 3, 9)(5, 2, 6)(12, 10, 4)(8, 11, 7)$$

och

$$(1, 5, 12, 8)(2, 10, 11, 3)(4, 7, 9, 6) = (1, 5, 12, 8)(3, 2, 10, 11)(9, 6, 4, 7).$$

Detta innebär att vi multiplicerar med 5 för varje steg vi tar åt höger och med 3 för varje steg vi tar nedåt. Eftersom elementet i rad 0 och kolumn 0 är lika med 1 får vi att elementet i rad r och kolumn k är lika med

$$(3^r \cdot 5^k) \bmod 13.$$

Ö.4. Vi använder induktion över antalet cykler n . Basfallet i induktionen är $n = 1$.¹ I detta fall ska vi räkna antalet cykliska permutationer på en mängd med k element. Det finns $(k-1)!$ sådana permutationer, och mycket riktigt har vi att

$$\frac{(nk)!}{n! \cdot k^n} = \frac{k!}{1! \cdot k^1} = (k-1)!.$$

Låt nu $n \geq 2$, och studera cykeln som innehåller det största talet nk . De övriga $k-1$ elementen i cykeln kan väljas på $\binom{nk-1}{k-1}$ olika sätt, och de kan ordnas på $(k-1)!$ olika sätt. Detta ger

$$\frac{(nk-1)!}{(nk-k)!} = \frac{(nk-1)!}{((n-1)k)!}$$

möjliga val för cykeln. Det återstår nu $nk-k = (n-1)k$ element, som ska fördelas över $n-1$ cykler med vardera k element. Induktion över n ger att antalet möjligheter för detta är

$$\frac{((n-1)k)!}{(n-1)! \cdot k^{n-1}}.$$

Multiplikation ger att det totala antalet möjligheter är

$$\frac{(nk-1)!}{((n-1)k)!} \cdot \frac{((n-1)k)!}{(n-1)! \cdot k^{n-1}} = \frac{(nk-1)!}{(n-1)! \cdot k^{n-1}} = \frac{nk \cdot (nk-1)!}{nk \cdot (n-1)! \cdot k^{n-1}} = \frac{(nk)!}{n! \cdot k^n}.$$

Ö.5. Vi använder induktion över antalet delmängder n . Basfallet i induktionen är $n = 1$. I detta fall ska vi räkna antalet partitioner av en mängd med k element bestående av en enda mängd. Det finns bara en sådan partition, och mycket riktigt har vi att

$$\frac{(nk)!}{n! \cdot (k!)^n} = \frac{k!}{1! \cdot (k!)^1} = 1.$$

Låt nu $n \geq 2$, och studera delmängden som innehåller det största talet nk . De övriga $k-1$ elementen i delmängden kan väljas på

$$\binom{nk-1}{k-1} = \frac{(nk-1)!}{((n-1)k)! \cdot (k-1)!}$$

olika sätt. Det återstår nu $nk-k = (n-1)k$ element, som ska fördelas över $n-1$ delmängder med vardera k element. Induktion över n ger att antalet möjligheter för detta är

$$\frac{((n-1)k)!}{(n-1)! \cdot (k!)^{n-1}}.$$

Multiplikation ger att det totala antalet möjligheter är

$$\begin{aligned} & \frac{(nk-1)!}{((n-1)k)! \cdot (k-1)!} \cdot \frac{((n-1)k)!}{(n-1)! \cdot (k!)^{n-1}} = \frac{(nk-1)!}{(n-1)! \cdot (k!)^{n-1} \cdot (k-1)!} \\ &= \frac{nk \cdot (nk-1)!}{nk \cdot (n-1)! \cdot (k!)^{n-1} \cdot (k-1)!} = \frac{(nk)!}{n! \cdot (k!)^n}. \end{aligned}$$

¹Det är helt i sin ordning att ha $n = 0$ som basfall, såväl här som i uppgift Ö.5.

Ö.6. Låt c_n vara antalet 231-undvikande permutationer av $\{1, \dots, n\}$; vi sätter $c_0 = 1$. Låt $n \geq 1$. I en given tillåten permutation $\pi = a_1 a_2 \dots a_n$, låt $k+1$ vara den position där vi hittar talet n . Vi hävdar att de första k elementen i π måste vara de k minsta talen $1, \dots, k$. Anta nämligen att något $a \geq k+1$ är på någon av dessa positioner. Då måste något $b \leq k$ vara på någon av de positioner som ligger till höger om n . Detta innebär dock att anb bildar mönstret 231, vilket ger en motsägelse.

Anta nu att var och en av $a_1 a_2 \dots a_k$ och $a_{k+2} a_{k+3} \dots a_n$ är 231-undvikande. Då är även hela permutationen π 231-undvikande, ty de första k elementen är alla mindre än de $n-k$ sista. Omvänt gäller att var och en av $a_1 a_2 \dots a_k$ och $a_{k+2} a_{k+3} \dots a_n$ är 231-undvikande om π är 231-undvikande.

Nu är antalet 231-undvikande permutationer av $\{1, \dots, k\}$ lika med c_k , medan antalet 231-undvikande permutationer av $\{k+2, \dots, n-1\}$ är c_{n-k-1} . Summerar vi över k får vi

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1},$$

vilket, tillsammans med startvillkoret $c_0 = 1$, visar att c_n är lika med det n :te Catalantalet.

Ö.7. En permutation π är en involution om och endast om π^2 är identiteten.

(a) Vi har att

$$\begin{aligned}\pi^2(k) &= \pi((k+m) \bmod 2m) = ((k+m)+m) \bmod 2m \\ &= (k+2m) \bmod 2m = k.\end{aligned}$$

• Vi har att

$$\pi^2(k) = \pi((a-k) \bmod 2m) = (a - (a-k)) \bmod 2m = k \bmod 2m.$$

• Vi har att

$$\pi = (1, 2, 4, 8, 5, 10, 9, 7, 3, 6).$$

π är alltså en cyklisk permutation av längd 10. Detta medför att $\pi^{10} = (\pi^5)^2$ är identiteten, vilket innebär att π^5 är en involution.

Ö.8. Studera en partition av X med egenskapen att en delmängd i partitionen innehåller exakt n element. Vi har två fall:

- Partitionen består av två delmängder av storlek n . Det finns $\frac{1}{2} \binom{2n}{n}$ sådana partitioner. Varje delmängd Y till X av storlek n ger nämligen upphov till partitionen $\{Y, X \setminus Y\}$. Det finns $\binom{2n}{n}$ sådana delmängder, men eftersom de två delmängderna Y och $X \setminus Y$ ger upphov till samma partition måste vi dela detta antal med 2.
- Partitionen består av exakt en delmängd av storlek n . Det finns $\binom{2n}{n}$ sätt att välja denna delmängd Y . Antalet partitioner av mängden $X \setminus Y$ i minst två delmängder är $B_n - 1$; vi subtraherar 1 eftersom vi ska räkna bort partitionen $\{X \setminus Y\}$. Multiplikation ger att antalet partitioner av X med givna egenskaper är $\binom{2n}{n}(B_n - 1)$.

Summering ger att det sökta antalet partitioner är

$$\frac{1}{2} \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n}(B_n - 1) = \binom{2n}{n} \left(B_n - \frac{1}{2} \right).$$

Ö.9. (Uppdaterad den 17 april.) Låt $n \geq 1$ och studera den första mängden i partitionen. Om antalet element i mängden är j finns det $\binom{n}{j}$ sätt att välja mängden. De övriga $n - j$ elementen kan partitioneras på P_{n-j} olika sätt. Den första mängden är icke-tom, vilket innebär att j ligger mellan 1 och n . Vi får alltså att

$$P_n = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} P_{n-j} = [i = n - j] = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{n-i} P_i = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} P_i.$$

För att beräkna den genererande funktionen $P(x)$ noterar vi att

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{n \geq 0} P_n \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n \geq 1} P_n \frac{x^n}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n \geq 1} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} P_i \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n \geq 1} \sum_{i=0}^{n-1} P_i \frac{x^i}{i!} \frac{x^{n-i}}{(n-i)!} \\ &= 1 + \sum_{i \geq 0} \sum_{n \geq i+1} P_i \frac{x^i}{i!} \frac{x^{n-i}}{(n-i)!} = 1 + \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 1} P_i \frac{x^i}{i!} \frac{x^j}{j!} \\ &= 1 + \sum_{i \geq 0} P_i \frac{x^i}{i!} \sum_{j \geq 1} \frac{x^j}{j!} = 1 + P(x)(e^x - 1), \end{aligned}$$

och därmed att $P(x) = 1/(2 - e^x)$.

Ö.10. (Uppdaterad den 17 april.) Först påminner vi om att det n :te Belltalet B_n är lika med antalet partitioner av mängden $\{1, \dots, n\}$. För en given vinnande kastsvit, låt A_i vara mängden av pilar som hamnar i ring i . Låt k vara maximalt sådant att någon pil hamnar i ring k . Detta innebär att $A_{k+1}, \dots, A_n$ är tomma, och villkoret (3) ger att $A_1, \dots, A_k$ alla är icke-tomma. I synnerhet är $\{A_1, \dots, A_k\}$ en partition av $\{1, \dots, n\}$.

Vi vill visa att vi har en bijektion mellan vinnande kastsviter och partitioner av $\{1, \dots, n\}$. För en given partition vill vi alltså visa att det finns precis en kastsvit som ger denna partition enligt ovanstående procedur. Ordna mängderna i partitionen som $\{A_1, \dots, A_k\}$ så att

$$\min A_1 < \min A_2 < \dots < \min A_k.$$

För en given partition ordnar vi alltså mängderna i stigande följd med avseende på varje mängds minsta element. Vi har då att en vinnande kastsvit ger upphov till partitionen $\{A_1, \dots, A_k\}$ om och endast om A_i är den mängd av pilar som hamnar i ring i för $1 \leq i \leq k$. Villkoret (3) är nämligen ekvivalent med att det minsta elementet i A_i är mindre än det minsta elementet i A_j för alla $i < j$.

Ö.11.

- (a) I en given permutation med k cykler, studera den cykel som innehåller elementet n . Om längden på cykeln är r har vi att cykeln är på formen $(x_1, \dots, x_r)$, där $x_r = n$. Det finns $(n-1)!/(n-r)!$ sätt att välja elementen $x_1, \dots, x_{r-1}$ och sedan $c_{n-r, k-1}$ sätt att välja de övriga $k-1$ cyklerna; vi har $n-r$ återstående element. Talet r är som minst 1 och som mest $n-(k-1) = n-k+1$, ty om r är större än $n-k+1$ finns det inte plats för ytterligare $k-1$ cykler i permutationen. Vi erhåller därmed att

$$c_{n,k} = \sum_{r=1}^{n-k+1} \frac{(n-1)!}{(n-r)!} c_{n-r, k-1}.$$

- (b) Vi är intresserade av

$$f'_k(x) = \sum_{n \geq k} c_{n,k} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

alltså derivatan av

$$f_k(x) = \sum_{n \geq k} c_{n,k} \frac{x^n}{n!}.$$

Vi ser att

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq k} c_{n,k} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} &= \sum_{n \geq k} \sum_{r=1}^{n-k+1} \frac{(n-1)!}{(n-r)!} c_{n-r, k-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{r \geq 1} \sum_{n \geq r+k-1} c_{n-r, k-1} \cdot \frac{x^{r-1} \cdot x^{n-r}}{(n-r)!} \\ [m = n-r] &= \sum_{r \geq 1} x^{r-1} \sum_{m \geq k-1} c_{m, k-1} \cdot \frac{x^m}{m!} = \frac{1}{1-x} \cdot f_{k-1}(x). \end{aligned}$$

- (c) Vi använder induktion över k för att bevisa påståendet. För $k=0$ får vi att

$$\frac{(-\ln(1-x))^0}{0!} = 1,$$

vilket är lika med $f_0(x)$. Anta att $k \geq 1$. Induktion ger att

$$f'_k(x) = \frac{f_{k-1}(x)}{1-x} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{(-\ln(1-x))^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Vi har nu att derivatan av $\frac{(-\ln(1-x))^k}{k!}$ är lika med

$$D(-\ln(1-x)) \cdot \frac{k \cdot (-\ln(1-x))^{k-1}}{k!} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{(-\ln(1-x))^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{f_{k-1}(x)}{1-x}.$$

Alltså är

$$f_k(x) = \frac{(-\ln(1-x))^k}{k!} + C$$

för någon konstant C . Eftersom $c_{0,k} = 0$ är konstanttermen i $f_k(x)$ lika med noll, vilket innebär att $C = 0$.

Ö.12.

- (a) I en given partition med k delmängder, studera den delmängd som innehåller elementet n . Om storleken på delmängden är r har vi $\binom{n-1}{r-1}$ möjligheter för de övriga $r-1$ elementen i mängden och sedan $S_{n-r,k-1}$ sätt att välja de övriga $k-1$ delmängderna; vi har $n-r$ återstående element. Talet r är som minst 1 och som mest $n-(k-1) = n-k+1$, ty om r är större än $n-k+1$ finns det inte plats för ytterligare $k-1$ delmängder i partitionen. Vi erhåller därmed att

$$S_{n,k} = \sum_{r=1}^{n-k+1} \binom{n-1}{r-1} S_{n-r,k-1}$$

- (b) Vi är intresserade av

$$f'_k(x) = \sum_{n \geq k} S_{n,k} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

alltså derivatan av

$$f_k(x) = \sum_{n \geq k} S_{n,k} \frac{x^n}{n!}.$$

Vi ser att

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq k} S_{n,k} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} &= \sum_{n \geq k} \sum_{r=1}^{n-k+1} \binom{n-1}{r-1} S_{n-r,k-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{r \geq 1} \sum_{n \geq r+k-1} S_{n-r,k-1} \cdot \frac{x^{r-1} \cdot x^{n-r}}{(r-1)! \cdot (n-r)!} \\ [m = n-r] &= \sum_{r \geq 1} \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} \sum_{m \geq k-1} S_{m,k-1} \cdot \frac{x^m}{m!} = e^x \cdot f_{k-1}(x). \end{aligned}$$

- (c) Vi använder induktion över k för att bevisa påståendet. För $k=0$ får vi att

$$\frac{(e^x - 1)^0}{0!} = 1,$$

vilket är lika med $f_0(x)$. Anta att $k \geq 1$. Induktion ger att

$$f'_k(x) = e^x \cdot f_{k-1}(x) = e^x \cdot \frac{(e^x - 1)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Vi har nu att derivatan av $\frac{(e^x - 1)^k}{k!}$ är lika med

$$D(e^x - 1) \cdot \frac{k \cdot (e^x - 1)^{k-1}}{k!} = e^x \cdot \frac{(e^x - 1)^{k-1}}{(k-1)!} = e^x \cdot f_{k-1}(x).$$

Alltså är

$$f_k(x) = \frac{(e^x - 1)^k}{k!} + C$$

för någon konstant C . Eftersom $S_{0,k} = 0$ är konstanttermen i $f_k(x)$ lika med noll, vilket innebär att $C = 0$.

Ö.13. Studera diagrammet för en given partition. Antalet kvadrater i kolumn 1 är lika med antalet delar. Antalet kvadrater i rad 1 är lika med den största delen i partitionen. I synnerhet har vi att en partition har högst k delar om och endast om den största delen i partitionens konjugat (se avsnitt 1) är högst k . Konjugat ger alltså en bijektion mellan partitioner med högst k delar och partitioner sådana att varje del är högst k .

Ö.14. Vi har en bijektion mellan mängden av partitioner av talet n och mängden av partitioner av talet kn sådana att varje del är delbar med k . Avbilda nämligen partitionen

$$n = x_1 + \cdots + x_r$$

på

$$kn = kx_1 + \cdots + kx_r.$$

Ö.15. Studera en partition som är lika med sitt eget konjugat. Idén i beviset är att dela in partitionen i "hakar" och bilda en följd $(b_1, \dots, b_m)$ så att b_i är storleken på den i :te haken. För att beskriva proceduren studerar vi Figur 2, där hakarna i diagrammet är markerade med omväxlande vitt och grått. Storleken på hakarna är i tur och ordning 13, 7, 5 och 1, vilket ger följden $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (13, 7, 5, 1)$ och alltså partitionen $26 = 13 + 7 + 5 + 1$, en partition med udda och sinsemellan olika tal. Storleken på en given hake är uppenbarligen udda och minst två mer än haken precis innanför. Detta medför att följden $(b_1, \dots, b_m)$ alltid består av udda och sinsemellan olika tal. Omvänt kan vi för en sådan följd sätta ihop hakar som i Figur 2 och på så sätt få en partition som är lika med sitt eget konjugat. Detta ger en bijektion mellan de två mängder av objekt som skulle räknas.

Ö.16. Se Figur 4 för de unika tablåerna.

1	5	6	7
2	8	11	12
3	9	13	15
4	10	14	16

1	2	3	5	8	9	10	14
4	6	7	11	12	13	15	16

1	3	4	5	14
2	6	7	15	16
8	9	10		
11	12	13		

Figur 4: De unika fullständiga tablåerna i uppgift Ö.16.

I fallet med den första tablå kan vi resonera stegvis på följande sätt:

- (i) Elementet 4 befinner sig i den fjärde raden. Detta innebär att den enda möjligheten för de tre positionerna ovanför 4 i den första kolumnen är elementen 1, 2 och 3.
- ii) Eftersom 7 ligger i den fjärde kolumnen finns det bara två möjligheter för de två positionerna till vänster om 7 i den andra och tredje kolumnen, nämligen 5 och 6.
- (iii) Eftersom elementet 10 ligger på den fjärde raden måste elementen ovanför 10 på den andra och tredje raden att vara 8 och 9.
- (iv) Med elementet 12 i den fjärde kolumnen måste 11 ligga i den tredje kolumnen direkt till vänster om 12.
- (v) Eftersom 14 ligger i den fjärde raden och den tredje kolumnen finns det bara en möjlighet för de återstående elementen 13, 15 och 16.

Se Figur 5 för illustrationer av de mellanliggande stegen (i)-(iv).

1			7
2			12
3			
4	10	14	

(i)

1	5	6	7
2			12
3			
4	10	14	

(ii)

1	5	6	7
2	8		12
3	9		
4	10	14	

(iii)

1	5	6	7
2	8	11	12
3	9		
4	10	14	

(iv)

Figur 5: Steg (i)-(iv) i lösningen till uppgift Ö.16, första tablån.

På liknande sätt kan vi resonera för de två övriga tablåerna; se Figur 6 och Figur 7 för de mellanliggande stegen.

1	2	3	5	8			14
4			11				

(i)

1	2	3	5	8			14
4	6	7	11				

(ii)

1	2	3	5	8	9	10	14
4	6	7	11				

(iii)

Figur 6: Mellanliggande steg i lösningen till uppgift Ö.16, andra tablån.

1	3	4	5	14
2		7		
11	12	13		

(i)

1	3	4	5	14
2	6	7		
11	12	13		

(ii)

1	3	4	5	14
2	6	7		
8	9	10		
11	12	13		

(iii)

Figur 7: Mellanliggande steg i lösningen till uppgift Ö.16, tredje tablån.

Ö.17. Resultatet för $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ blir

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 6 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} \right).$$

Resultatet för $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ blir

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 6 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \right).$$

Att vi får samma par av tablåer fast i omvänd ordning beror på att de två permutationerna är varandras inverser.

Ö.18. Resultatet blir

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 7 \\ \hline 3 & 5 & 8 \\ \hline 4 & & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 7 \\ \hline 3 & 5 & 8 \\ \hline 4 & & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} \right).$$

Tablåerna är lika eftersom permutationen är sin egen invers.

Ö.19. Resultatet blir

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \hline b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \hline n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \\ \hline \end{array} \right).$$

Efter n steg har vi nämligen paret

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \hline \end{array} \right).$$

Detta följer av att $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$.

Vi använder induktion över k , $0 \leq k \leq n$, för att visa att vi efter $n+k$ steg av algoritmen har paret

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a_1 & \cdots & a_k & b_{k+1} & \cdots & b_n \\ \hline b_1 & \cdots & b_k & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ \hline n+1 & \cdots & n+k & & & \\ \hline \end{array} \right).$$

Observera att $k = n$ ger det slutliga paret av tablåer.

Basfallet $k = 0$ stämmer uppenbarligen. Anta att $k \geq 0$ och studera steg $n+k+1$ av algoritmen. Det aktuella talet som ska in i algoritmen är a_{k+1} . Enligt antagandena har vi att $a_k < a_{k+1} < b_{k+1}$. Detta innebär att a_{k+1} hamnar i kolumn $k+1$ på den position där just nu b_{k+1} befinner sig. Eftersom $b_k < b_{k+1}$ knuffas b_{k+1} ner till positionen längst till höger på den andra raden. Resultatet blir alltså

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline a_1 & \cdots & a_k & a_{k+1} & b_{k+2} & \cdots & b_n \\ \hline b_1 & \cdots & b_k & b_{k+1} & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & \cdots & k & k+1 & k+2 & \cdots & n \\ \hline n+1 & \cdots & n+k & n+k+1 & & & \\ \hline \end{array} \right),$$

vilket avslutar induktionsbeviset.