

Lösningssförslag till övningsuppgifter, del III

Obs! Preliminär version!

Ö.1. Mängden av kanter med vikt 1 innehåller inga cykler, vilket innebär att det finns ett uppspännande träd som innehåller samtliga kanter med vikt 1. Det finns $r(k-1)$ sådana kanter. Eftersom ett träd på rk hörn innehåller $rk-1$ kanter behöver vi ytterligare $(rk-1) - r(k-1) = r-1$ kanter för att få ett uppspännande träd. Dessa kanter har alla vikt 2, vilket innebär att totalvikten på ett minimalt uppspännande träd är

$$1 \cdot r(k-1) + 2 \cdot (r-1) = rk + r - 2.$$

Ö.2. För $n=1$ har vi en graf med två hörn 0 och 1 och en kant med vikten 1. Det enda uppspännande trädet har uppenbarligen vikten 1.

Låt $n \geq 2$ och använd induktion. För $i=0,1$, låt $H_{n,i}$ vara den inducerade delgrafen av H_n bestående av alla hörn som slutar med i . Observera att vi kan identifiera $H_{n,i}$ med H_{n-1} ; identifiera hörnet $b_1b_2 \dots b_{n-1}i$ i $H_{n,i}$ med hörnet $b_1b_2 \dots b_{n-1}$ i H_{n-1} . I synnerhet har ett minimalt uppspännande träd i $H_{n,i}$ samma vikt som ett minimalt uppspännande träd i H_{n-1} . Induktion ger att denna vikt är lika med

$$2^n - (n-1) - 2 = 2^n - n - 1.$$

Den giriga algoritmen (*greedy algorithm*) ger att ett minimalt uppspännande träd i H_n har minsta möjliga antal kanter med maximal vikt n . Plockar vi bort alla kanter med vikt n från H_n får vi en graf bestående av två sammanhängande komponenter som är precis $H_{n,0}$ och $H_{n,1}$. Vi får alltså ett minimalt uppspännande träd i H_n genom att först välja ett minimalt uppspännande träd i var och en av graferna $H_{n,0}$ och $H_{n,1}$ och sedan lägga till en enda kant med vikt n som sammanbinder dessa båda grafer. Totalvikten för ett sådant träd blir

$$2(2^n - n - 1) + n = 2^{n+1} - 2n - 2 + n = 2^{n+1} - n - 2.$$

Ö.3.

- (a) Låt T och U vara två olika uppspännande träd i G . Vi vill visa att högst ett av dessa träd är minimalt. Detta medför att det finns ett unikt minimalt uppspännande träd i G .

Sortera kanterna i T och U i växande ordning med avseende på vikten som $(e_1, \dots, e_{n-1})$ respektive $(f_1, \dots, f_{n-1})$. Låt k vara minimalt sådant att $e_k \neq f_k$. Vi kan anta att $w(e_k) < w(f_k)$; fallet då $w(f_k) < w(e_k)$ är analogt. Studera grafen $U + e_k$. I denna graf finns en unik cykel som innehåller kanten e_k . Denna cykel måste innehålla någon kant f_j sådan att $j \geq k$, ty kantmängden $\{f_1, \dots, f_{k-1}, e_k\} = \{e_1, \dots, e_{k-1}, e_k\}$ innehåller ingen cykel; T är ett träd. I synnerhet har vi att $w(e_k) < w(f_j)$. Plockar vi bort f_j från $U + e_k$ får vi ett uppspännande träd U' vars totalvikt är strikt lägre än totalvikten på trädet U . Slutsatsen är att U inte är minimalt.

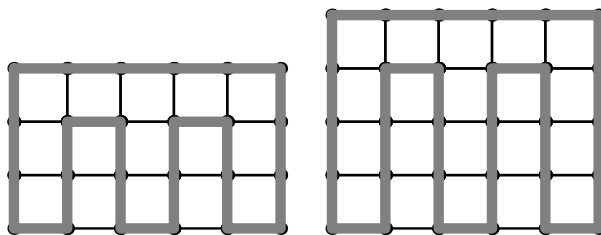
- (b) För den ena riktningen, anta att det finns en kant e i $G \setminus T$ sådan att den unika cykeln i $T + e$ innehåller en kant f sådan att $w(e) < w(f)$. Då är $(T + e) - f$ ett uppspännande träd till G med lägre totalvikt än T . Alltså är T inte minimalt.

För den andra riktningen, anta att T inte är minimalt. Låt U vara ett minimalt uppspännande träd i G . (Enligt (a) är U unikt.) Precis som i lösningen till (a) sorterar vi kanterna i T och U i växande ordning med avseende på vikten som $(e_1, \dots, e_{n-1})$ respektive $(f_1, \dots, f_{n-1})$. Låt k vara minimalt sådant att $e_k \neq f_k$. Enligt lösningen till (a) kan vi inte ha att $w(e_k) < w(f_k)$, ty detta skulle innebära att U inte är minimalt. Alltså är $w(e_k) > w(f_k)$. Den unika cykeln i $T + f_k$ kan inte enbart bestå av kanter från mängden $\{e_1, \dots, e_{k-1}, f_k\} = \{f_1, \dots, f_{k-1}, f_k\}$, ty detta är en delmängd till kantmängden till U . Alltså innehåller cykeln en kant e_j sådan att $j > k$. Eftersom $w(e_j) > w(e_k) > w(f_k)$ drar vi slutsatsen att f_k inte har maximal vikt i den unika cykeln i $T + f_k$.

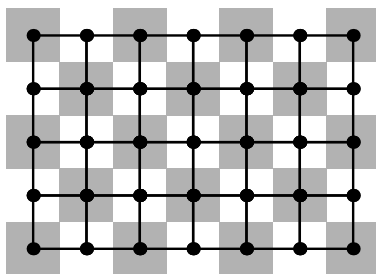
Ö.4. Låt $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ vara en Hamiltoncykel. Eftersom varje kant sammanbinder ett hörn från A och ett hörn från B kommer vartannat hörn att tillhöra A och vartannat hörn att tillhöra B . Om v_1 tillhör A kommer alltså alla v_i sådana att i är udda att tillhöra A och alla övriga hörn att tillhöra B . Dessutom har vi en kant mellan v_1 och v_n , vilket innebär att v_n tillhör B om v_1 tillhör A . I synnerhet är n jämnt, och $|A| = |B| = n/2$.

Ö.5.

- (a) Se Figur 11 för exempel på Hamiltoncykler i $G_{4,6}$ och $G_{5,6}$. (Det finns förstås många andra möjligheter.)
- (b) Notera att $G_{r,k}$ är bipartit. Detta ser man direkt om man placerar grafen på ett schackbräde som i Figur 12; varje kant går mellan en grå och en vit ruta. När r och k är udda är även rk udda. I synnerhet har vi ett udda antal hörn i $G_{r,k}$, vilket innebär att antalet grå rutor inte är lika med antalet vita rutor. Enligt föregående uppgift innebär detta att det inte finns någon Hamiltoncykel i $G_{r,k}$.



Figur 11: Hamiltoncykler i $G_{4,6}$ (till vänster) och $G_{5,6}$ (till höger).



Figur 12: Gittergrafan $G_{5,7}$ ritad på ett schackbräde.

Ö.6.

- (a) Låt $(v_1, \dots, v_{2m})$ vara en Hamiltoncykel i G . Då utgör kantmängderna

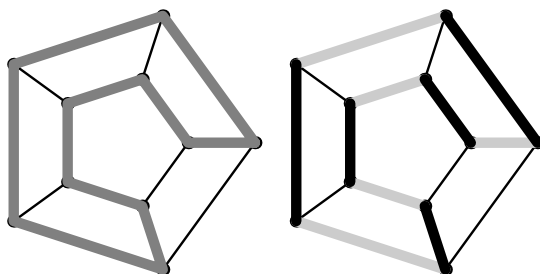
$$M_1 = \{(v_1, v_2), (v_3, v_4), \dots, (v_{2m-1}, v_{2m})\}$$

och

$$M_2 = \{(v_2, v_3), (v_4, v_5), \dots, (v_{2m-2}, v_{2m-1}), (v_{2m}, v_1)\}$$

perfekta matchningar i G , och de två mängderna har inga gemensamma kanter.

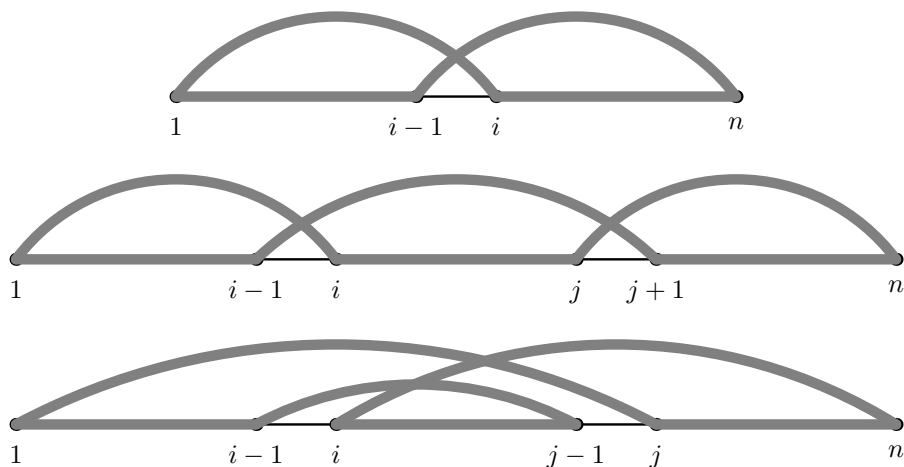
- (b) Låt än en gång $(v_1, \dots, v_{2m})$ vara en Hamiltoncykel i G . Definiera kantmängderna M_1 och M_2 precis som i (a), och låt M_3 vara mängden av kanter i G som inte finns med i vare sig M_1 eller M_2 . Vi har att M_3 är en perfekt matchning. För varje hörn i G finns det nämligen exakt tre kanter i G som innehåller hörnet. Eftersom precis en av dessa kanter är med i M_1 och precis en är med i M_2 återstår precis en kant som är med i M_3 . Detta är ekvivalent med att M_3 är en perfekt matchning.
- (c) Vi löser problemet genom att använda metoden i (b). Först hittar vi en Hamiltoncykel i grafen; se bilden till vänster i Figur 13. Denna Hamiltoncykel kan vi sedan dela upp i två perfekta matchningar M_1 och M_2 , och de kanter som ej är med i cykeln bildar en tredje matchning M_3 . I bilden till höger i Figur 13 har vi markerat M_1 med tjocka svarta kanter, M_2 med tjocka gråa kanter och M_3 med tunna svarta kanter.



Figur 13: Till vänster en Hamiltoncykel i grafen i uppgift Ö.6 (c). Till höger en uppdelning av kanterna i tre perfekta matchningar.

Ö.7. Låt P vara Hamiltonstigen $(1, 2, 3, \dots, n)$.

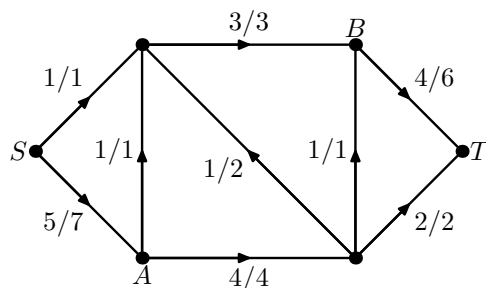
- (a) Om $(1, i)$ och $(i-1, n)$ fanns med i G skulle vi få en Hamiltoncykel genom att gå framåt i P från 1 till $i-1$, hoppa från $i-1$ till n , gå baklänges i P från n till i och hoppa tillbaka från i till 1. Se den första bilden i Figur 14 för en illustration.
- (b) Den här gången skulle vi få en Hamiltoncykel genom att gå framåt i P från 1 till $i-1$, hoppa från $i-1$ till $j+1$, gå framåt i P från $j+1$ till n , hoppa från n till j , gå bakåt i P från j till i och hoppa tillbaka från i till 1. Se den andra bilden i Figur 14 för en illustration.
- (c) Här skulle vi få en Hamiltoncykel genom att gå framåt i P från 1 till $i-1$, hoppa från $i-1$ till $j-1$, gå bakåt från $j-1$ till i , hoppa från i till n , gå bakåt från n till j och hoppa tillbaka från j till 1. Se den tredje bilden i Figur 14 för en illustration.



Figur 14: TBD uppgift Ö.7.

Ö.8.

- (a) I Figur 15 har vi markerat ett maximalt flöde och i vilka riktningar de olika kanterna används. Beteckningen a/b vid en given kant betyder att flödet genom kanten är a och att kapaciteten är b (uttryckt i enheten hundra miljoner kubikmeter per vecka). Värdet på flödet från S till T är som synes 6. Att flödet är maximalt kan man se genom att studera snittet av kanter som skiljer länderna B och T från de fyra andra länderna. Detta snitt har uppenbarligen värdet 6 och utnyttjas maximalt. Detsamma gäller snittet som skiljer länderna S och A från de fyra övriga länderna.
- (b) För att uppnå ett flöde på 8 (uttryckt i enheten hundra miljoner kubikmeter per vecka) behöver man öka totalflödet från S till T med 2. Som man kan se i Figur 15 finns det utrymme att öka flödet såväl från S till A som från B till T med just denna mängd. Ledningen från A till B ska alltså ha kapaciteten 2 för att tillgodose T 's behov.



Figur 15: Nätverket i uppgift Ö.8.

Ö.9.

- (a) Bilda ett nytt nätverk D' genom att lägga till ett nytt hörn t och dra en riktad kant från t_i till t för $1 \leq i \leq r$. Ge kanten (t_i, t) så pass hög kapacitet att den överstiger den totala kapaciteten in i t_i (alltså i praktiken obegränsad kapacitet). Vi vet hur man bestämmer ett maximalt flöde i D' med källa s och sänka t .

För ett flöde f' i D' får vi ett flöde f i D genom att plocka bort de tillagda kanterna. Omvänt kan vi utvidga ett flöde f i D till ett flöde f' i D' genom att definiera $f'(t_i, t)$ att vara nettoflödet in i t_i . Detta ger en bijektion mellan flöden i D och flöden i D' , och uppenbarligen bevaras storleken under denna bijektion, ty storleken ges av flödet ut ur s .

För att sammanfatta bestämmer vi ett maximalt flöde i D genom att först bestämma ett maximalt flöde i D' med källa s och sänka t på sedvanligt vis och sedan plocka bort de tillagda kanterna.

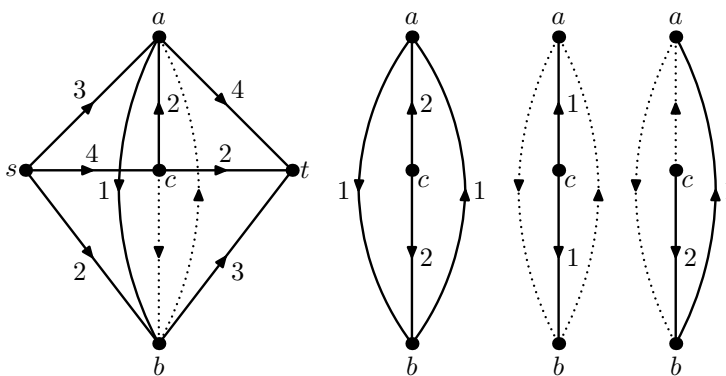
- (b) Gör precis som i (a), men definiera kapaciteten för (t_i, t) i D' att vara p_i . Med hjälp av bijektionen i (a) mellan flöden i D och D' ser vi att vi har ett flöde i D med önskade egenskaper precis då motsvarande flöde i D' utnyttjar kapaciteten i kanten (t_i, t) maximalt för $1 \leq i \leq r$. Detta innebär att vårt problem är lösbart om och endast om det finns ett maximalt flöde i D' av storlek $\sum_{i=1}^r p_i$.

Ö.10.

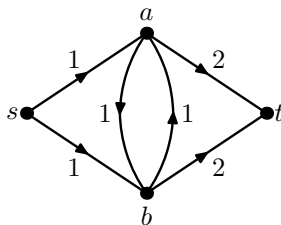
- (a) Vi hittar först ett godtyckligt maximalt flöde f , säg det längst till vänster i Figur 16. Att flödet är maximalt inses genom att notera att storleken på flödet är 9, vilket är lika med storleken på snittet bestående av kanterna som utgår från s och även storleken på snittet bestående av kanterna som går in i t . Eftersom $f(a, b) = +1 > 0$ kan vi välja $f_1 = f$.

Vi vill nu hitta f_2 och f_3 . Notera att varje maximalt flöde utnyttjar kapaciteten hos kanterna vid s och t maximalt. Vår enda frihet är därmed flödet genom kanterna mellan hörnen a , b och c . Vi illustrerar detta delnätverk i den andra bilden från vänster i Figur 16. I ett maximalt flöde är flödet in i c från s lika med 4 och flödet ut ur c till t lika med 2. Det totala nettoflödet från c till a och b i delnätverket är alltså $+2$. På samma sätt får vi att det totala nettoflödet från a till b och c är -1 , liksom det totala nettoflödet från b till a och c . Vi kan därmed definiera f_2 och f_3 som i den tredje respektive fjärde bilden i Figur 16.

- (b) Se Figur 17 för ett nätverk med önskade egenskaper. Vi överläter till läsaren att hitta tre maximala flöden f_1 , f_2 och f_3 sådana att $f_1(a, b) > 0$, $f_2(a, b) = 0$ och $f_3(a, b) < 0$.



Figur 16: Längst till vänster ett maximalt flöde f_1 i uppgift Ö.10 (a) sådant att $f_1(a, b) > 0$. Tvåa från vänster det delnätverk som erhålls om vi tar bort källan och sänkan. Till höger flöden f_2 och f_3 sådana att $f_2(a, b) = 0$ och $f_3(a, b) < 0$.



Figur 17: Exempel på ett nätverk med egenskaper som i uppgift Ö.10 (b).

Ö.11. Definiera ett nätverk med hörnmängd $\{s, t\} \cup A \cup B$ på följande vis: Dra en riktad kant från varje hörn i A till varje hörn i B , och ge denna kant kapaciteten 1. Dra även en riktad kant från s till vart och ett av hörnen i A , och ge kanten från s till a_i vikten c_i . Dra slutligen en riktad kant från vart och ett av hörnen i B till t , och ge kanten från b_j till t kapaciteten d_j . Problemet att konstruera en bipartit graf med önskade egenskaper är ekvivalent med att hitta ett maximalt flöde i detta nätverk sådant att alla kanter ut ur s och in i t utnyttjas maximalt.

(Se 18.1.4 (Gale-Rysers sats) i Cameron om du vill fördjupa dig i det här problemet.)

Ö.12.

- (a) Låt v_1 och v_2 vara hörn i $G_1 \cup G_2$. Om båda hörnen tillhör G_i för något i är avståndet mellan hörnen högst $\text{diam}(G_i) \leq \text{diam}(G_1) + \text{diam}(G_2)$. Anta att v_1 tillhör G_1 och att v_2 tillhör G_2 . Eftersom $V_1 \cap V_2$ är icke-tom finns ett hörn w som tillhör båda graferna. Per definition har vi att avståndet mellan v_1 och w är högst $\text{diam}(G_1)$ och att avståndet mellan w och v_2 är högst $\text{diam}(G_2)$. Avståndet mellan v_1 och v_2 är därmed som mest $\text{diam}(G_1) + \text{diam}(G_2)$. Slutsatsen är att diametern av $G_1 \cup G_2$ är som mest $\text{diam}(G_1) + \text{diam}(G_2)$.
- (b) Låt G_1 vara den kompletta grafen på hörnmängden $\{1, 2\}$, och låt G_2 vara grafen med hörnmängd $\{2, 3, 4\}$ och kantmängd $\{(2, 3), (2, 4)\}$. Eftersom 2 är granne med alla andra hörn i $G_1 \cup G_2$ har vi att $\text{diam}(G_1 \cup G_2) = 2$. Detta är mindre än $\text{diam}(G_1) + \text{diam}(G_2) = 1 + 2 = 3$. (Det finns förstås många andra exempel.)

Ö.13.

- (a) Uppenbarligen gäller att $\tau_v(G) \geq \tau(G)$ för varje v . Låt W vara en kanttäckning av G av storlek $\tau(G)$. Vi har då att även $W \cup \{v\}$ är en kanttäckning av G . Denna kanttäckning har storlek $\tau(G)$ eller $\tau(G) + 1$ beroende på om v tillhör W eller inte. Alltså är $\tau_v(G) \leq \tau(G) + 1$.
- (b) Anta att v är ett hörn sådant att varje kanttäckning av G som innehåller v har storlek minst $\tau(G) + 1$. Då finns det ingen kanttäckning W av $G - v$ av storlek $\tau(G) - 1$, för i så fall skulle vi ha en kanttäckning $W \cup \{v\}$ av G av storlek $\tau(G)$.

Anta omvänt att det inte finns någon kanttäckning av $G - v$ av storlek $\tau(G) - 1$. Då finns det ingen kanttäckning W av G av storlek $\tau(G)$ sådan att v tillhör W , för om en sådan fanns skulle $W \setminus \{v\}$ vara en kanttäckning av $G - v$ av storlek $\tau(G) - 1$.

Slutsatsen är att varje hörn v i G är med i en kanttäckning av G av storlek $\tau(G)$ om och endast om $G - v$ har en kanttäckning av storlek $\tau(G) - 1$ för varje hörn v i G .

- (c) Vi har att $\tau(K_n) = n - 1$. Tar vi bort kanten mellan två hörn, säg a och b , får vi en graf G sådan att $\tau(G) = n - 2$, ty mängden bestående av alla hörn utom a och b är en kanttäckning av G . Alltså är K_n kantkritisk.

Låt $(v_1, v_2, \dots, v_{2m+1})$ vara Hamiltoncykeln i C_{2m+1} . Varje hörn täcker två kanter, vilket innebär att vi behöver minst $m + 1$ hörn för att täcka de $2m + 1$ kanterna. Eftersom hörnmängden $\{v_1, v_3, v_5, \dots, v_{2m+1}\}$ utgör en kanttäckning av storlek $m + 1$ drar vi slutsatsen att $\tau(C_{2m+1}) = m + 1$. Tar vi bort en kant, säg den mellan v_1 och v_{2m+1} , får vi en graf som kan täckas med hörnmängden $\{v_2, v_4, v_6, \dots, v_{2m}\}$, en mängd av storlek m . Alltså är C_{2m+1} kantkritisk.

Ö.14.

- (a) Studera ett hörn A i $H_{n,k}$. Per definition är A en delmängd till $\{1, \dots, n\}$ med k element. Ett annat hörn B är granne med A om och endast om B är en delmängd till $X = \{1, \dots, n\} \setminus A$ med k element. Eftersom X innehåller $n - k$ element finns det $\binom{n-k}{k}$ sådana hörn.

- (b) För att beräkna diametern noterar vi att två olika hörn antingen är disjunkta eller har ett gemensamt element. I det första fallet är hörnen grannar. I det andra fallet är hörnen på formen $ab = \{a, b\}$ och $bc = \{b, c\}$, där a , b och c alla är olika. Vi kan gå från ab till bc via hörnet $de = \{d, e\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{a, b, c\}$, vilket innebär att diametern är 2.

För att beräkna omfånget noterar vi att varje stig av längd tre med tre olika hörn är på formen (ab, cd, ea) , där $\{a, b, c, d, e\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Hörnen ab och ea är inte grannar, och den enda gemensamma grannen till de två hörnen är cd . Alltså saknar grafen cykler av längd tre och fyra. Omfånget är därmed minst lika med fem. $(12, 34, 51, 23, 45)$ är ett exempel på en cykel av längd fem, vilket visar att omfånget är precis fem.

- (c) Eftersom B och $A \cup C$ är disjunkta och $|A| = |B| = |C| = k$ måste vi ha att

$$|A \setminus C| = |A \cup C| - |C| \leq (n - |B|) - k = n - 2k.$$

- (d) Använd induktion över i . För $i = 1$ får vi olikheten som vi visade i (c). Anta att $i \geq 2$, och använd induktion. Genom att använda ledningen till uppgiften med $X = A_1$, $Y = A_{2i-1}$ och $Z = A_{2i+1}$ erhåller vi att

$$|A_1 \setminus A_{2i+1}| \leq |A_1 \setminus A_{2i-1}| + |A_{2i-1} \setminus A_{2i+1}|.$$

Induktion ger att $|A_1 \setminus A_{2i-1}| \leq (i-1)(n-2k)$ och $|A_{2i-1} \setminus A_{2i+1}| \leq n-2k$, vilket kombinerat med ovanstående medför att

$$\begin{aligned} |A_1 \setminus A_{2i+1}| &= |A_1 \setminus A_{2i-1}| + |A_{2i-1} \setminus A_{2i+1}| \\ &\leq (i-1)(n-2k) + (n-2k) = i(n-2k). \end{aligned}$$

Anta nu att $(A_1, \dots, A_{2i+1})$ är en cykel. Detta innebär att A_1 och A_{2i+1} är disjunkta, vilket medför att $|A_1 \setminus A_{2i+1}| = |A_1| = k$. Instoppat i ovanstående olikhet får vi att

$$k \leq i(n-2k) \iff i \geq \frac{k}{n-2k} \iff 2i+1 \geq \frac{n}{n-2k}.$$

Alltså innehåller cykeln minst $\frac{n}{n-2k}$ element.

Ö.15.

- (a) Frankrike, Luxemburg, Belgien och Tyskland har alla gemensam gräns med varandra, vilket innebär att vi behöver fyra olika färger för dessa fyra länder.
- (b) Om vi färgar Tyskland gul, Polen röd och Tjeckien blå måste vi i tur och ordning färga Slovakien gul, Österrike röd, Ungern blå, Slovenien gul, Schweiz blå, Frankrike röd, Belgien blå och Nederländerna röd. Efter-som färgningen är entydigt bestämd av färgerna på Tyskland, Polen och Tjeckien finns det $3! = 6$ färgningar med tre färger.

Ö.16. Vi använder induktion och formeln med borttagning och kontrahering av kanter. Basfallet är $n = 3$, där vi har att

$$(r-1)^3 + (-1)^3(r-1) = (r-1)(r^2 - 2r) = r(r-1)(r-2) = \chi_{C_3}(r).$$

Anta att $n \geq 4$, och låt e vara en godtycklig kant i C_n . Tar vi bort e får vi grafen P_n bestående av en Hamiltonstig av hörnlängd n . Kontraherar vi e får vi en cykel av längd $n-1$, alltså grafen C_{n-1} . Detta innebär att

$$\chi_{C_n}(r) = \chi_{P_n}(r) - \chi_{C_{n-1}}(r).$$

Det kromatiska polynomet för P_n uppfyller

$$\chi_{P_n}(r) = r(r-1)^{n-1}.$$

Det första hörnet i stigen kan nämligen färgas på r sätt i en r -färgning. Givet att vi har färgat hörn $i-1$ kan vi färga hörn i på $r-1$ sätt. Multiplikation ger den önskade formeln.

Per induktion erhåller vi att

$$\chi_{C_{n-1}}(r) = (r-1)^{n-1} + (-1)^{n-1}(r-1).$$

Slutsatsen är att

$$\begin{aligned} \chi_{C_n}(r) &= \chi_{P_n}(r) - \chi_{C_{n-1}}(r) \\ &= r(r-1)^{n-1} - ((r-1)^{n-1} + (-1)^{n-1}(r-1)) \\ &= (r-1)^n + (-1)^n(r-1). \end{aligned}$$

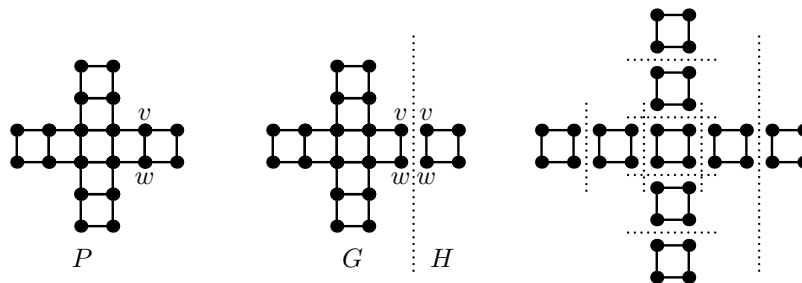
Ö.17.

- (a) För $1 \leq k \leq r$, låt a_k vara antalet r -färgningar av G sådana att v ges färgen k . Det är uppenbart att a_k inte beror på k ; antalet färgningar blir detsamma oavsett vilken färg vi ger v . Eftersom det totala antalet färgningar är $\chi_G(r)$ får vi att varje a_k är lika med $\chi_G(r)/r$.
- (b) Låt $r \geq 1$. Anta att vi vill färga $G \cup H$ med r färger. Först färgar vi G , vilket kan göras på $\chi_G(r)$ olika sätt. Sedan färgar vi H , vilket vi dock gör med restriktionen att hörnet v måste ha samma färg som i färgningen av G . Genom att använda (a) drar vi slutsatsen att vi kan färga H på $\chi_H(r)/r$ olika sätt. Multiplikation ger det önskade resultatet.

Ö.18.

- (a) För en given följd $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_k)$ av parvis olika färger från $\{1, \dots, n\}$, låt $a_{\mathbf{c}}$ vara antalet r -färgningar av G sådana att w_i ges färgen c_i för $1 \leq i \leq k$. Det är uppenbart att $a_{\mathbf{c}}$ inte beror på $\mathbf{c}$, ty enda skillnaden mellan olika $\mathbf{c}$ är namnen på färgerna. Antalet olika $\mathbf{c}$ är $r!/(r-k)!$, vilket ger att varje $a_{\mathbf{c}}$ är lika med $(r-k)!\chi_G(r)/r!$.
- (b) Låt $r \geq k$. Anta att vi vill färga $G \cup H$ med r färger. Först färgar vi G , vilket kan göras på $\chi_G(r)$ olika sätt. Sedan färgar vi H , vilket vi dock gör med restriktionen att hörnen i W måste ha samma färger som i färgningen av G . Eftersom W är en klick i såväl G som H kan vi använda (a) för att dra slutsatsen att vi kan färga H på $(r-k)!\chi_H(r)/r!$ olika sätt. Multiplikation ger det önskade resultatet.

Ö.19. Vi använder oss upprepade gånger av uppgift Ö.18 (b). Låt v och w definieras som i bilden längst till vänster i Figur 18.



Figur 18: Uppdelningen av P i lösningen till uppgift Ö.19.

Dela upp grafen i delgrafer G och H som i bilden i mitten i Figur 18. Enligt uppgift Ö.18 (b) har vi att

$$\chi_P(r) = \frac{\chi_G(r)\chi_H(r)}{r(r-1)}.$$

Vi kan skära upp grafen G på ytterligare sju ställen så att vi får den uppdelning som vi har längst till höger i Figur 18. Genom att tillämpa (a) sju gånger och använda oss av det faktum att alla resulterande grafer är isomorfa med H drar vi slutsatsen att

$$\chi_G(r) = \frac{(\chi_H(r))^8}{r^7(r-1)^7},$$

vilket medför att

$$\chi_P(r) = \frac{(\chi_H(r))^9}{r^8(r-1)^8}.$$

I uppgift Ö.16 räknade vi ut att

$$\chi_H(r) = (r-1)^4 + (r-1) = r(r-1)(r^2 - 3r + 3).$$

Därmed har vi att

$$\chi_P(r) = \frac{r^9(r-1)^9(r^2 - 3r + 3)^9}{r^8(r-1)^8} = r(r-1)(r^2 - 3r + 3)^9.$$

Ö.20.

- (a) För en given färgning av hörnen i G med $\chi(G)$ färger, låt U_i vara mängden av hörn som fått färg i . Per definition är varje U_i en oberoende mängd, vilket ger att

$$n = \sum_{i=1}^{\chi(G)} |U_i| \leq \sum_{i=1}^{\chi(G)} \alpha(G) = \chi(G)\alpha(G).$$

- (b) Först noterar vi att $f_r(G - e) - f_r(G)$ är lika med antalet oberoende mängder i $G - e$ av storlek r som innehåller både v och w . Alla andra oberoende mängder i $G - e$ är nämligen oberoende även i G .

Låt nu I vara en hörnmängd i G/e . Vi har två fall:

- I innehåller inte det hörn x som svarar mot den kontraherade kanten e . Då är I oberoende i G/e om och endast om I är oberoende i G' .
- I innehåller hörnet x . Då är I oberoende i G/e om och endast om $(I \setminus \{x\}) \cup \{v, w\}$ är oberoende i $G - e$.

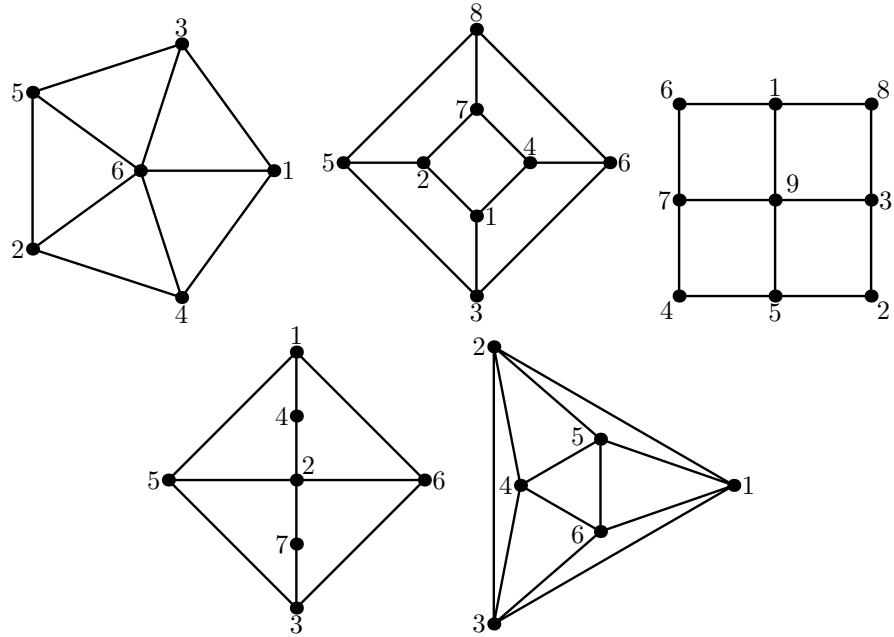
Alltså är $f_k(G/e)$ lika med $f_k(G')$ plus antalet oberoende mängder I i $G - e$ av storlek $k + 1$ sådana att både v och w tillhör I . Enligt ovan är detta antal lika med $f_{k+1}(G - e) - f_{k+1}(G)$. Slutsatsen är att

$$f_k(G/e) - f_k(G') = f_{k+1}(G - e) - f_{k+1}(G).$$

Med $r = k - 1$ får vi att detta är ekvivalent med att

$$f_r(G) = f_r(G - e) + f_{r-1}(G') - f_{r-1}(G/e).$$

Ö.21. Se Figur 19 för representationer av de fem graferna utan korsande kanter.

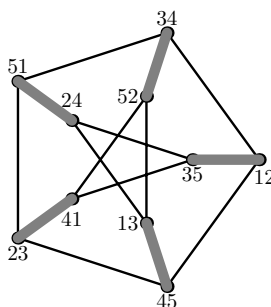


Figur 19: De fem graferna i uppgift Ö.21 ritade utan korsande kanter.

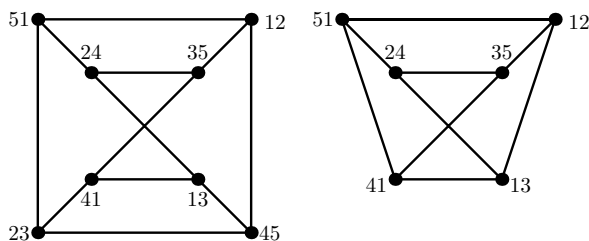
Ö.22. Inget lösningsförslag på denna uppgift.

Ö.23.

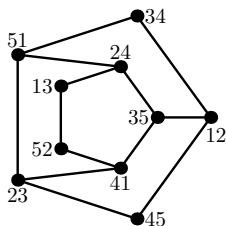
- (a) Kontraherar vi de markerade kanterna i Figur 20 ser vi att K_5 är en minor till P . Kuratowski-Wagners sats ger därmed att P inte är planär.
- (b) Vi visar att $P - e$ har $K_{3,3}$ som minor; enligt Kuratowski-Wagners sats medför detta att $P - e$ inte är planär. Först kontraherar vi kanterna $(12, 34)$ och $(41, 52)$, vilket ger grafen till vänster i Figur 21. Kontrahering av kanterna $(23, 51)$ och $(12, 45)$ ger sedan grafen till höger i Figur 21. Denna graf är i själva verket $K_{3,3}$, vilket avslutar beviset.
- (c) Grafen är planär, vilket framgår av den planära framställningen i Figur 22.



Figur 20: I uppgift Ö.23 (a) kontraherar vi kanter markerade med grått.



Figur 21: Illustration av lösningen till uppgift Ö.23 (b).



Figur 22: Planär framställning av grafen i uppgift Ö.23 (c).

Ö.24.

- (a) Anta att såväl $D + (v, w)$ som $D + (w, v)$ innehåller en riktad cykel. Detta innebär att D innehåller dels en riktad stig från w till v och dels en riktad stig från v till w . Sätter vi samman dessa båda stigar får vi en riktad cykel i D , vilket är en motsägelse.
- (b) Ur (a) följer att b_1 är lika med antalet acykliska orienteringar D av $G - e$ sådana att precis en av $D + (v, w)$ och $D + (w, v)$ är acyklisk. Vidare är a_1 antalet acykliska orienteringar av G som antingen är på formen $D + (v, w)$, där $D + (w, v)$ ej är acyklisk, eller på formen $D + (w, v)$, där $D + (v, w)$ ej är acyklisk. Detta ger att $a_1 = b_1$.

För att visa att $a_2 = 2b_2$, låt X vara mängden av acykliska orienteringar D av $G - e$ sådana att både $D + (v, w)$ och $D + (w, v)$ är acykliska. Låt Y_1 vara mängden av acykliska orienteringar D av G sådana att kanten e är riktad från (v, w) och sådana att vi kan ändra riktning på e och fortfarande ha en acyklisk orientering. Låt Y_2 vara den mängd av acykliska orienteringar som erhålls från Y_1 genom att ändra riktning på kanten e . Vi har uppenbarligen lika många element i Y_1 och Y_2 , och $|Y_1| + |Y_2| = a_2$. Vidare har vi en bijektion från X till Y_1 som ges av att lägga till kanten (v, w) . Slutsatsen blir att

$$b_2 = |X| = |Y_1| = |Y_2| = a_2/2.$$

- (c) Låt D vara en acyklisk orientering av G sådan att $D + (w, v)$ och $D + (v, w)$ är acykliska. Detta innebär att det inte finns någon riktad stig i D från v till w eller från w till v . I synnerhet är D/e en acyklisk orientering av G/e , där D/e är den riktade graf som erhålls från D genom att identifiera v och w . Omvänt har vi för en given acyklisk orientering D' av G/e att det finns en unik acyklisk orientering D av $G - e$ sådan att $D/e = D'$; rikta varje kant på formen vx eller wx i $G - e$ på samma sätt som vx är riktad i D' . Vi ser att $D + (w, v)$ och $D + (v, w)$ är acykliska, ty annars vore inte D/e acyklisk. I synnerhet har vi en bijektion som visar att $b_2 = a(G/e)$.

Om vi kombinerar likheterna $a_1 = b_1$, $a_2 = 2b_2$ och $b_2 = a(G/e)$ får vi att

$$a(G) = a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + a(G/e) = a(G - e) + a(G/e).$$

- (d) Använd induktion över antalet kanter i G .

Om G är den tomma grafen på k hörn finns det en acyklisk orientering av G . Eftersom $\chi_G(n) = n^k$ får vi att $(-1)^k \chi_G(-1) = 1$.

Anta att G har k hörn och minst en kant. Låt e vara en godtycklig kant i G . Induktion ger att

$$\begin{aligned} a(G) &= a(G - e) + a(G/e) \\ &= (-1)^k \chi_{G-e}(-1) + (-1)^{k-1} \chi_{G/e}(-1) \\ &= (-1)^k (\chi_{G-e}(-1) - \chi_{G/e}(-1)) \\ &= (-1)^k \chi_G(-1), \end{aligned}$$

och vi är klara.