

Lösningssförslag till övningsuppgifter, del IV

Obs! Preliminär version!

Ö.1. Vi använder oss av den formel som vi härledde i avsnitt 3, nämligen att antalet banor av följder av längd n med k ettor ges av

$$\frac{1}{n} \sum_r \binom{[n, r]}{k \cdot [n, r]/n},$$

där vi summerar över alla $r \in \{0, \dots, n-1\}$ sådana att k är delbart med $n/[n, r]$. Precis som tidigare skriver vi $[n, r] = \gcd(n, r)$.

- (a) $(n, k) = (8, 4)$. Vi har att $k = 4$ är delbart med $n/[n, r] = 8/[8, r]$ om och endast om r är jämnt. Det sökta antalet är alltså

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} \left(\binom{[8, 0]}{4 \cdot [8, 0]/8} + \binom{[8, 2]}{4 \cdot [8, 2]/8} + \binom{[8, 4]}{4 \cdot [8, 4]/8} + \binom{[8, 6]}{4 \cdot [8, 6]/8} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(\binom{8}{4} + \binom{2}{1} + \binom{4}{2} + \binom{2}{1} \right) = \frac{70 + 2 + 6 + 2}{8} = 10. \end{aligned}$$

- (b) $(n, k) = (9, 6)$. Vi har att $k = 6$ är delbart med $n/[n, r] = 9/[9, r]$ om och endast om r är delbart med 3. Det sökta antalet är alltså

$$\begin{aligned} & \frac{1}{9} \left(\binom{[9, 0]}{6 \cdot [9, 0]/9} + \binom{[9, 3]}{6 \cdot [9, 3]/9} + \binom{[9, 6]}{6 \cdot [9, 6]/9} \right) \\ &= \frac{1}{9} \left(\binom{9}{6} + \binom{3}{2} + \binom{3}{2} \right) = \frac{84 + 3 + 3}{9} = 10. \end{aligned}$$

- (c) $[n, k] = 1$. Vi har att k är delbart med $n/[n, r]$ om och endast om $n = [n, r]$, ty $[n, k] = 1$. Den enda möjligheten är $r = 0$, vilket ger att det sökta antalet är

$$\frac{1}{n} \binom{[n, 0]}{k \cdot [n, 0]/n} = \frac{1}{n} \binom{n}{k}.$$

Detta kan man även inse utan Burnsidess lemma, ty varje bana innehåller exakt n följder.

(Observera att vi i (c) får ett bevis för att $\binom{n}{k}$ är delbart med k om $[n, k] = 1$.)

Ö.2. Vi löser problemet med Burnsidess lemma (det är förstås tillåtet att använda mer direkta metoder). Låt oss beräkna $\text{fix}(g)$ för varje $g \in D_4$.

- Identiteten (1 element). Detta element fixerar alla hörn, vilket innebär att $\text{fix}(g)$ är lika med antalet par av olika hörn som inte är sammanbundna. Det finns sammanlagt $\binom{8}{2} = 28$ par av hörn och 8 kanter, vilket innebär att $\text{fix}(g) = 28 - 8 = 20$.
- Rotation $\pm 90^\circ$ (2 element). I detta fall är g antingen $(1234)(5678)$ eller $(1432)(5876)$. I en tillåten färgning måste antingen alla eller inga hörn i varje cykel ha färgen 1. Vi får därmed att $\text{fix}(g) = 0$, ty vi kan inte få en hörnmängd av storlek 2.
- Rotation 180° (1 element). I detta fall är $g = (13)(24)(57)(68)$. Observera att hörnen i varje cykel ej är sammanbundna. Detta innebär att $\text{fix}(g) = 4$.
- Spegling i vågrät eller lodrät linje (2 element). Vi har då att g är antingen $(12)(34)(56)(78)$ eller $(14)(23)(58)(67)$. I båda fallen består precis två av cyklerna av hörn som ej är sammanbundna, vilket innebär att $\text{fix}(g) = 2$.
- Spegling i diagonal (2 element). I detta sista fall har vi att g är antingen $(13)(2)(4)(57)(6)(8)$ eller $(24)(1)(3)(68)(5)(7)$. Studera det första fallet. För att få en tillåten färgning som fixeras av g kan vi välja de två elementen med färgen 1 antingen från en av 2-cyklerna eller från två av 1-cyklerna. Det finns $2 + \binom{4}{2} = 8$ sådana möjligheter. Dock utgör $(2, 6)$ och $(4, 8)$ kanter, varför vi måste räkna bort dessa två möjligheter. Slutsatsen blir att $\text{fix}(g) = 6$.

Summering ger att antalet banor är lika med

$$\frac{1}{|D_4|} \sum_{g \in D_4} \text{fix}(g) = \frac{1}{8} (1 \cdot 20 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 6) = \frac{40}{8} = 5.$$

Ö.3.

(a) Låt oss studera de fem olika typerna av rotation:

- Identiteten (1 element). Denna rotation fixerar alla kanter, vilket innebär att cykelstrukturen är 1^{12} .
- Rotation 180° runt x -, y - eller z -axeln (3 element). Eftersom vi roterar ett halvt varv kommer vi tillbaka till utgångspunkten efter två rotationer. Varje cykel har alltså längd 1 eller 2. Eftersom ingen kant fixeras blir cykelstrukturen 2^6 .
- Rotation $\pm 90^\circ$ runt x -, y - eller z -axeln (6 element). I detta fall bildar de fyra kanterna till sidan vid den givna axeln en cykel, de fyra kanterna till den motstående sidan en cykel och de övriga fyra kanterna en cykel. Cykelstrukturen blir därmed 4^3 .
- Rotation 180° runt axeln $e_i \pm e_j$, $i < j$ (6 element). Rotationen sker runt en linje som går genom två motstående kanter. Dessa två kanter är de enda som fixeras, vilka innebär att cykelstrukturen blir $2^5 1^2$.
- Rotation $\pm 120^\circ$ runt axeln $e_1 \pm e_2 \pm e_3$ (8 element). Denna rotation sker runt en linje genom två motstående hörn. Ingen kant fixeras av rotationen, utan vi får cykler av storlek 3. Cykelstrukturen blir 3^4 .

(b) För att kunna använda Burnsides lemma behöver vi först beräkna $\text{fix}(g)$, alltså antalet färgningar som fixeras av g , för varje gruppelament g . Enligt Hjälpssats 3.2 ges detta antal av r^k , där k är antalet cykler i cykeluppdelningen i g . Enligt (a) har vi därmed följande tabell.

Cykelstruktur	Antal g	$\text{fix}(g)$
1^{12}	1	r^{12}
2^6	3	r^6
4^3	6	r^3
$2^5 1^2$	6	r^7
3^4	8	r^4

Burnsides lemma ger därmed att antalet banor av färgningar är lika med

$$\frac{1}{24} (r^{12} + 3 \cdot r^6 + 6 \cdot r^3 + 6 \cdot r^7 + 8r^4) = \frac{r^3(r^9 + 6r^4 + 3r^3 + 8r + 6)}{24}.$$

I specialfallet $r = 2$ får vi att antalet banor är lika med

$$\frac{2^3(2^9 + 6 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^3 + 8 \cdot 2 + 6)}{24} = \frac{512 + 96 + 24 + 16 + 6}{3} = 218.$$

Ö.4. Automorfgrupp till hexagonen C_6 är den dihedrala gruppen D_6 , en grupp med tolv element. Låt oss studera C_6/π för vart och ett av dessa tolv element π .

- π är identiteten, vilket innebär att $C_6/\pi = C_6$. Enligt uppgift 16 i häfte III har vi att

$$f_{C_6}(r) = (r-1)^6 + r - 1.$$

- π är rotation med ett snäpp, antingen medurs eller moturs. För båda dessa rotationer tillhör alla hörn samma bana, vilket innebär att C_6/π består av ett hörn och en ögla. I synnerhet är $f_{C_6/\pi}(r) = 0$.
- π är rotation med två snäpp, antingen medurs eller moturs. För båda dessa rotationer har vi två banor $\{1, 3, 5\}$ och $\{2, 4, 6\}$. Alla kanter går mellan dessa två banor, vilket innebär att C_6/π är isomorf med K_2 . Vi drar slutsatsen att

$$f_{C_6/\pi}(r) = r(r-1).$$

- π är rotation med tre snäpp. I detta fall har vi banorna $\{1, 4\}$, $\{2, 5\}$ och $\{3, 6\}$, och vi har kanter mellan alla par av banor. Alltså är C_6/π isomorf med K_3 , och

$$f_{C_6/\pi}(r) = r(r-1)(r-2).$$

- π är spegling i linjen genom hörnen i och $i+3$ för $i \in \{1, 2, 3\}$. Samtliga tre fall är analoga; låt oss studera fallet då $i = 1$. Vi får banorna $\{1\}$, $\{2, 6\}$, $\{3, 5\}$ och $\{4\}$, och vi har kanter mellan $\{1\}$ och $\{2, 6\}$, mellan $\{2, 6\}$ och $\{3, 5\}$ och mellan $\{3, 5\}$ och $\{4\}$. Slutsatsen blir att G/π är isomorf med en stig med tre kanter, vilket innebär att

$$f_{C_6/\pi}(r) = r(r-1)^3.$$

- π är spegling i en linje som är vinkelrät mot linjen genom i och $i+3$ för något $i \in \{1, 2, 3\}$. Än en gång kan vi studera fallet då $i = 1$. Vi får banorna $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$ och $\{5, 6\}$, vilket omedelbart visar att G/π har en ögla. Vi kan därför konstatera att $f_{C_6/\pi}(r) = 0$.

Burnsides lemma ger att antalet omärkta färgningar är

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12} (((r-1)^6 + r - 1) + 2 \cdot r(r-1) + r(r-1)(r-2) + 3 \cdot r(r-1)^3) \\ = & \frac{r(r-1)(r^4 - 5r^3 + 13r^2 - 15r + 8)}{12} \\ = & \frac{r^6 - 6r^5 + 18r^4 - 28r^3 + 23r^2 - 8r}{12}. \end{aligned}$$

Ö.5.

- (a) Varje tillåten färgning $c : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, r\}$ av K_n ger upphov till en följd

$$(c(1), c(2), \dots, c(n))$$

utan upprepning, och varje sådan följd av element från mängden $\{1, \dots, r\}$ ger på motsvarande sätt upphov till en tillåten färgning av K_n .

- (b) Vi kan lösa denna uppgift utan att använda Sats 4.1. Notera först att en färgning av K_n är tillåten om och endast om alla n hörn får olika färg. Automorfgruppen på K_n är nu den symmetriska gruppen S_n . Detta innebär att två färgningar av K_n är ekvivalenta om och endast om exakt samma uppsättning färger används i de två färgningarna. Vi sluter oss till att antalet omärkta färgningar med r färger är lika med antalet sätt att välja ut en mängd bestående av n av de r färgerna.

- (c) Varje färgning $c : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, r\}$ av O_n ger upphov till en följd

$$(c(1), c(2), \dots, c(n)),$$

och varje sådan följd av element från $\{1, \dots, r\}$ ger på motsvarande sätt upphov till en färgning av O_n .

- (d) Vi kan resonera precis som i (b). Alla tänkbara färgningar av O_n är tillåtna, och två färgningar av O_n är ekvivalenta om och endast om varje färg används exakt lika många gånger i de båda färgningarna. Slutsatsen är att antalet omärkta färgningar med r färger är lika med antalet sätt att välja ut en multimängd bestående av n färger från en mängd med r färger.

Ö.6. Burnsides lemma ger att antalet omärkta färgningar av O_n med r färger är lika med

$$\frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \text{fix}(\pi),$$

där $\text{fix}(\pi)$ är lika med antalet färgningar som fixeras av π . Hjälpssats 3.2 ger att $\text{fix}(\pi) = r^{\gamma(\pi)}$. Enligt uppgift Ö.5 är antalet omärkta färgningar lika med antalet multimängder av storlek n över en mängd av storlek r . Detta antal är $\binom{n+r-1}{n}$, vilket avslutar beviset.

Ö.7. Anta för enkelhetens skull att $e = (1, 2)$. Automorfigruppen för $G = K_n - (1, 2)$ är produktgruppen $S_2 \times S_{n-2}$ och består av alla permutationer π på $\{1, \dots, n\}$ som innehåller antingen cykeln $(1, 2)$ eller de två cyklerna (1) och (2) .

Om någon cykel i π innehåller fler än ett element från $\{3, \dots, n\}$ kommer vi att ha en ögla i G/π vid denna cykel. Slutsatsen blir att $f_{G/\pi}(r) = 0$. De enda gruppelament som återstår är identiteten id och transpositionen $(1, 2)$, alltså de två gruppelament som fixerar vart och ett av elementen $3, \dots, n$. Nu är

$$f_{G/\text{id}}(r) = f_G(r) = \prod_{i=0}^{n-2} (r-i) \cdot (r-n+2) = (r-n+2) \cdot \frac{r!}{(r-n+1)!}.$$

Vidare har vi att $G/(1, 2)$ är lika med K_{n-1} , vilket ger att

$$f_{G/(1,2)}(r) = f_{K_{n-1}}(r) = \prod_{i=0}^{n-2} (r-i) = \frac{r!}{(r-n+1)!}.$$

Eftersom gruppens storlek är $2(n-2)!$ ger Sats 4.1 att

$$\begin{aligned} \tilde{f}_G(r) &= \frac{1}{2(n-2)!} \left((r-n+2) \cdot \frac{r!}{(r-n+1)!} + \frac{r!}{(r-n+1)!} \right) \\ &= \frac{(r-n+3)}{2} \cdot \frac{r!}{(n-2)!(n-r+1)!} = \frac{r(r-n+3)}{2} \binom{r-1}{n-2}. \end{aligned}$$

Ö.8. Låt a_k vara antalet banor av följder med exakt k ettor. Vi använder oss av den formel som vi härledde i avsnitt 5, nämligen att

$$\sum_{k=0}^n a_k t^k = Z(C_n; 1+t, \dots, 1+t^n) = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} (1+t^{n/\gcd(n,r)})^{\gcd(n,r)}.$$

(a) $n = 8$. Vi har att

$$\begin{aligned}\gcd(8, 1) &= \gcd(8, 3) = \gcd(8, 5) = \gcd(8, 7) = 1, \\ \gcd(8, 2) &= \gcd(8, 6) = 2, \\ \gcd(8, 4) &= 4, \\ \gcd(8, 0) &= 8.\end{aligned}$$

Detta ger att

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^8 a_k t^k &= \frac{1}{8} (4(1+t^8) + 2(1+t^4)^2 + (1+t^2)^4 + (1+t)^8) \\ &= 1 + t + 4t^2 + 7t^3 + 10t^4 + 7t^5 + 4t^6 + t^7 + t^8.\end{aligned}$$

(b) $n = 9$. Vi har att $\gcd(9, r) = 1$ för $r \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$, $\gcd(9, r) = 3$ för $r \in \{3, 6\}$ och $\gcd(9, 0) = 9$. Detta ger att

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^9 a_k t^k &= \frac{1}{9} (6(1+t^9) + 2(1+t^3)^3 + (1+t)^9) \\ &= 1 + t + 4t^2 + 10t^3 + 14t^4 + 14t^5 + 10t^6 + 4t^7 + t^8 + t^9.\end{aligned}$$

(c) n ett primtal. Vi har att $\gcd(n, r) = 1$ för $1 \leq r \leq n-1$ och $\gcd(n, 0) = n$. Detta ger att

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n a_k t^k &= \frac{1}{n} ((n-1)(1+t^n) + (1+t)^n) \\ &= 1 + t^n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \binom{n}{k} t^k.\end{aligned}$$

Ö.9. Enligt lösningen till uppgift Ö.3 har vi att cykelindexet för gruppen är lika med

$$\frac{1}{24} (s_1^{12} + 3s_2^6 + 6s_4^3 + 6s_2^5 s_1^2 + 8s_3^4).$$

Låt f_k vara antalet banor med exakt k ettor. Cykelindexsatsen ger att talen f_k uppfyller identiteten

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^6 f_k t^k \\ = & \frac{1}{24} ((1+t)^{12} + 3(1+t^2)^6 + 6(1+t^4)^3 + 6(1+t^2)^5(1+t)^2 + 8(1+t^3)^4). \end{aligned}$$

En jobbig uträkning ger att detta är lika med

$$\begin{aligned} & 1 + t + 5t^2 + 13t^3 + 27t^4 + 38t^5 + 48t^6 + 38t^7 + 27t^8 \\ & + 13t^9 + 5t^{10} + t^{11} + t^{12}. \end{aligned}$$

Ö.10.

- (a) q2 Låt f_k vara antalet banor av matriser med exakt k ettor. Direkt inspektion ger att $f_0 = f_1 = f_5 = f_6 = 1$. Vidare har vi att $f_2 = f_3 = f_4 = 3$. Nedan anger vi en representant för varje ekvivalensklass; inom parentes till höger om representanten står antalet element i klassen. Observera för varje fixerat k att summan av dessa antal är lika med binomialkoefficienten $\binom{6}{k}$.

$$\begin{aligned} k = 2 : & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{(6)} \\ k = 3 : & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(12)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{(6)} \\ k = 4 : & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{(6)} \end{aligned}$$

- (b) Produktgruppen $S_2 \times S_3$ ger en gruppverkan på binära 2×3 -matriser; ett gruppelment (g, h) avbildar matrisen M på matrisen M' med egenskapen att

$$M'_{i,j} = M_{g(i),h(j)}.$$

Detta inser man genom att använda observationen att binära 2×3 -matriser kan identifieras med 2-färgningar av mängden $\{1, 2\} \times \{1, 2, 3\}$. I paret (g, h) svarar g mot en omkastning av raderna, medan h svarar mot en omkastning av kolonnerna.

- (c) $S_2 \times S_3$ består av tolv element, som vi kan dela in i sex olika klasser enligt följande:

Cykelindex	Antal element	Beskrivning
s_1^6	1	identiteten
s_3^2	2	rotation av kolonnerna
$s_2^2 s_1^2$	3	byte av två kolonner
s_2^3	1	radbyte
s_6	2	radbyte och rotation av kolonnerna
s_2^3	3	radbyte och byte av två kolonner

Vi får därmed att cykelindexet är lika med

$$Z(S_2 \times S_3; s_1, s_2, \dots, s_6) = \frac{1}{12} (s_1^6 + 2s_3^2 + 3s_2^2 s_1^2 + s_2^3 + 2s_6 + 3s_2^3).$$

Cykelindexsatsen ger att antalet banor f_k med k ettor uppfyller identiteten

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^6 f_k t^k &= Z(S_2 \times S_3; 1+t, 1+t^2, \dots, 1+t^6) \\ &= \frac{1}{12} ((1+t)^6 + 2(1+t^3)^2 + 3(1+t^2)^2(1+t)^2 \\ &\quad + (1+t^2)^3 + 2(1+t^6) + 3(1+t^2)^3) \\ &= 1+t+3t^2+3t^3+3t^4+t^5+t^6. \end{aligned}$$

Detta ger att $f_0 = f_1 = f_5 = f_6 = 1$ och $f_2 = f_3 = f_4 = 3$.

Ö.11.

- (a) Man kan resonera som i (b) i föregående uppgift. Den här gången tillåter vi enbart rotation, vilket innebär att den aktuella gruppen är produktgruppen $C_3 \times C_4$.
- (b) $C_3 \times C_4$ består av tolv element, som vi kan dela in i sex olika klasser enligt följande:

Cykelindex	Antal gruppelament	Radrotation	Kolonnrotation
s_1^{12}	1	0	0
s_4^3	2	0	± 1
s_2^6	1	0	2
s_3^4	2	± 1	0
s_{12}	4	± 1	± 1
s_6^2	2	± 1	2

I de två kolonnerna till höger anger vi hur många steg gruppelamenten roterar rader och kolonner. Vi får därmed att cykelindexet är lika med

$$Z(C_3 \times C_4; s_1, s_2, \dots, s_{12}) = \frac{1}{12} (s_1^{12} + 2s_4^3 + s_2^6 + 2s_3^4 + 4s_{12} + 2s_6^2).$$

Cykelindexsatsen ger att antalet banor f_k med k ettor uppfyller identiteten

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{12} f_k t^k &= Z(C_3 \times C_4; 1+t, 1+t^2, \dots, 1+t^{12}) \\ &= \frac{1}{12} ((1+t)^{12} + 2(1+t^4)^3 + (1+t^2)^6 \\ &\quad + 2(1+t^3)^4 + 4(1+t^{12}) + 2(1+t^6)^2). \end{aligned}$$

Efter långrandiga uträkningar kan man konstatera att detta är lika med

$$\begin{aligned} &1 + t + 6t^2 + 19t^3 + 43t^4 + 66t^5 + 80t^6 + 66t^7 + 43t^8 \\ &+ 19t^9 + 6t^{10} + t^{11} + t^{12}. \end{aligned}$$

Ö.12. Först räknar vi ut $z(g) = z(g; s_1, \dots, s_{10})$ för varje $g \in G$. Låt oss beteckna tårtbitarna till vänster med $(0, 0), \dots, (0, 4)$ och tårtbitarna till höger med $(1, 0), \dots, (1, 4)$, ordnade medurs. Ett gruppelament g är entydigt bestämt av värdena $g(0, 0)$ och $g(1, 0)$. Om $g(0, 0) = (i, k)$ har vi nämligen att $g(0, j) = (i, (k + j) \bmod 5)$ för $1 \leq j \leq 4$, och på samma sätt är $g(1, j)$ entydigt bestämt av $g(1, 0)$. Vi delar in gruppelamenten med avseende på värdena på $g(0, 0)$ och $g(1, 0)$:

- $g(0, 0) = (0, 0)$ och $g(1, 0) = (1, 0)$ (1 element). Detta innebär att g är identiteten. Detta gruppelament fixerar samtliga tårtbitar, så $z(g) = s_1^{10}$.
- $g(0, 0) = (0, j)$, där $1 \leq j \leq 4$, och $g(1, 0) = (1, 0)$ (4 element). I detta fall bildar tårtbitarna till vänster en cykel, medan vi har en cykel för varje tårtbit till höger. Alltså är $z(g) = s_5 s_1^5$.
- $g(0, 0) = (0, 0)$ och $g(1, 0) = (1, j)$, där $1 \leq j \leq 4$ (4 element). Detta fall är analogt med föregående fall, vilket innebär att $z(g) = s_5 s_1^5$.
- $g(0, 0) = (0, j)$ och $g(1, 0) = (1, k)$, där $1 \leq j \leq 4$, $1 \leq k \leq 4$ (16 element). Här får vi två cykler med fem element, det vill säga $z(g) = s_5^2$.
- $g(0, 0) = (1, j)$ och $g(1, 0) = (0, (5 - j) \bmod 5)$, $0 \leq j \leq 5$ (5 element). I detta fall får vi att

$$g^2(0, a) = g(1, (j + a) \bmod 5) = (0, (j + a + 5 - j) \bmod 5) = (0, a)$$

för alla a . På samma sätt ser vi att $g^2(1, a) = (1, a)$ för alla a . Alla cykler har alltså längd 2, vilket ger att $z(g) = s_2^5$.

- $g(0, 0) = (1, j)$ och $g(1, 0) = (0, k)$, $0 \leq j \leq 5$, $(j + k) \bmod 5 \in \{1, 2, 3, 4\}$ (20 element). Vi ser att

$$g^2(0, 0) = g(1, j) = (0, (j + k) \bmod 5) = (0, a),$$

där $a \in \{1, 2, 3, 4\}$. Analogt har vi att $g^2(1, 0) = (1, a)$. Detta innebär att g^2 består av två cykler av längd 5. Slutsatsen är att g består av en enda cykel av längd 10, vilket ger att $z(g) = s_{10}$.

Summering ger att

$$Z(G; s_1, \dots, s_{10}) = \frac{1}{50} (s_1^{10} + 8s_5 s_1^5 + 16s_5^2 + 5s_2^5 + 20s_{10}).$$

Cykelindexsatsen ger att antalet banor av storlek k är lika med koefficienten framför t^k i $Z(G; 1+t, 1+t^2, \dots, 1+t^{10})$. Ersätter vi s_i med $1+t^i$ i ovanstående uttryck får vi att

$$\begin{aligned} & Z(G; 1+t, 1+t^2, \dots, 1+t^{10}) \\ &= \frac{1}{50} ((1+t)^{10} + 8(1+t^5)(1+t)^5 + 16(1+t^5)^2 + 5(1+t^2)^5 + 20(1+t^{10})) \\ &= 1 + t + 3t^2 + 4t^3 + 6t^4 + 6t^5 + 6t^6 + 4t^7 + 3t^8 + t^9 + t^{10}. \end{aligned}$$