

SF2715 Tillämpad kombinatorik

Kompletterande material och övningsuppgifter

Del I

Jakob Jonsson

2 augusti 2009

Detta häfte innehåller kompletterande material till Del I av kursen SF2715 Tillämpad kombinatorik, som ges på KTH under andra halvan av våren 2009. Häftet utgör ett komplement till kursboken:

Peter J. Cameron, "Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms", Cambridge University Press, 1994.

Det huvudsakliga syftet med häftet är att ge studenten tillgång till rimliga mängder övningsuppgifter att arbeta med. Ett problem med kursboken är nämligen bristen på just bra övningsuppgifter. Uppgifterna i häftet är utformade för att svara mot de uppsatta målen för kursen. Jag har försökt göra en bedömning av uppgifternas svårighetsgrad genom att gradera dem från A till E; graderingen anger den betygsnivå som jag anser att problemet motsvarar. Observera att graderingen är mycket ungefärlig. Skicka gärna synpunkter på graderingen, i synnerhet om min bedömning av en uppgifts svårighetsgrad verkar vara helt galen. Lösningsförslag till uppgifterna kommer att finnas tillgängliga på kurshemsidan.

Fler uppgifter att öva på finns på tidigare års skrivningar. Dessa skrivningar kan laddas ned från kursens hemsida.

Ytterligare häften med material för de övriga delarna i kursen kommer att finnas tillgängliga inom en snar framtid.

Utöver övningsuppgifter innehåller häftet även några avsnitt med teori:

Avsnitt 1: Urvalsproblem. Vi diskuterar fyra klassiska varianter på problemet att välja k element ur en mängd med n element. Detta avsnitt utgör ett komplement till avsnitt 3.7 i Cameron.

Avsnitt 2: Multiplikationsprincipen för genererande funktioner. Vi ger en kombinatorisk tolkning av produkten av två eller flera genererande funktioner. Detta avsnitt utgör ett komplement till avsnitt 4.2 i Cameron.

Avsnitt 3: Räkna ord som undviker vissa delord av längd 2. Vi studerar problem som ger upphov till linjära rekursioner, alltså ekvationer i stil med $a_n = 3a_{n-1} - 2a_n$. En viktig klass av problem av denna typ handlar om att räkna ord som undviker vissa givna delord av längd två. Sådana problem kan lösas antingen med kombinatoriska *ad hoc*-metoder eller med mer systematiska metoder baserade på linjär algebra. Detta avsnitt utgör ett komplement till avsnitt 4.3 i Cameron.

Avsnitt 4: Catalantalen. Vi benar ut detaljerna i Camerons uträkning av den genererande funktionen för Catalantalen. Detta avsnitt utgör ett komplement till avsnitt 4.5 i Cameron.

Innehåll

1	Urvalsproblem	3
2	Multiplikation av genererande funktioner	4
3	Räkna ord som undviker vissa delord av längd 2	5
4	Catalantalen	8
Ö	Övningsuppgifter	10
Ö.1	Binomialkoefficientens värde	10
Ö.2	Ännu en rekursion för binomialkoefficienterna	10
Ö.3	Binomialsatsen I	10
Ö.4	Binomialsatsen II	10
Ö.5	Vem vet mest?	11
Ö.6	Växande följder av tal I	11
Ö.7	Växande följder av tal II	12
Ö.8	Genererande funktion för tärningskast	12
Ö.9	Slantsingling	12
Ö.10	Summor på formen $t + 2u + 3v$	13
Ö.11	Ord som undviker 00	13
Ö.12	Ord som undviker 00 och 11	13
Ö.13	Ord som undviker 01	13
Ö.14	Ord som undviker ij om $ i - j \geq 2$	14
Ö.15	Grannfria konfigurationer av brickor på ett bräde	14
Ö.16	Delmängders kardinalitet modulo 3	14
Ö.17	Hoppningar av tal på avstånd högst 2	15
Ö.18	Hoppningar av tal på avstånd högst 3	15
Ö.19	Växande följder av tal III	15
Ö.20	Icke-skärande hoppningar	16
Ö.21	Oavgjord tävling där den ena spelaren aldrig leder	16

1 Urvalsproblem

Följande är ett av de mest klassiska problemen inom enumerativ kombinatorik:

- På hur många sätt kan man välja k element från en mängd med n element?

Som problemet är formulerat är det dock inte helt uppenbart vad det är vi ska beräkna. För det första framgår det inte om det spelar någon roll i vilken ordning vi väljer de k elementen. För det andra är det inte klart om upprepade förekomster av ett och samma element är tillåtna. Beroende på hur vi väljer att precisera problemet på dessa båda punkter får vi fyra olika varianter av problemet. De fyra varianterna diskuteras kortfattat i avsnitt 3.7 i Cameron, och i det här avsnittet gör vi några tillägg och förtydliganden.

Ordningen spelar ej roll, upprepning är ej tillåten. I detta fall studerar vi delmängder av storlek k till en mängd av storlek n . Antalet sådana delmängder är lika med binomialkoefficienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Vi har följande mängder av storlek 3 med element från mängden $\{1, 2, 3, 4, 5\}$; vi skriver $abc = \{a, b, c\}$:

$$123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345.$$

Antalet delmängder av storlek k till en mängd av storlek n sammanfaller med antalet heltalsföljder $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ sådana att

$$1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n.$$

Vi har nämligen en bijektion mellan sådana växande följder och delmängder till $\{1, \dots, n\}$ av storlek k , där bijektionen ges av att avbilda följderna $(a_1, \dots, a_k)$ på mängden $\{a_1, \dots, a_k\}$.

Ordningen spelar ej roll, upprepning är tillåten. I detta fall blir problemet ekvivalent med att räkna antalet multimängder av storlek k med element från en mängd av storlek n . En multimängd är en mängd av element där samma element tillåts förekomma flera gånger. Två multimängder betraktas som identiska om antalet förekomster av varje element är detsamma i båda multimängderna. Vi har följande multimängder av storlek 3 med element från mängden $\{1, 2, 3\}$; vi skriver $abc = \{a, b, c\}$.

$$111, 112, 113, 122, 123, 133, 222, 223, 233, 333.$$

Antalet multimängder av storlek k över¹ en mängd av storlek n sammanfaller med antalet heltalsföljder $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ sådana att

$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq n.$$

Vi har nämligen en bijektion mellan sådana svagt växande heltalsföljder och multimängder av storlek k med element från $\{1, \dots, n\}$, där bijektionen ges av

¹”över” = ”med element från”.

att avbilda följden $(a_1, \dots, a_k)$ på multimängden $\{a_1, \dots, a_k\}$. På sidan 33 i Cameron visas att antalet är

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

I uppgift Ö.7 ges ett alternativt bevis.

Ordningen spelar roll, upprepning är ej tillåten. Eftersom k olika element kan ordnas på $k!$ olika sätt finns det i detta fall $k!$ gånger så många sätt som i det första fallet, alltså

$$k! \cdot \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

I fallet då $k = n$ erhåller vi en permutation av den givna mängden, alltså en ordnad följd där varje element i mängden förekommer precis en gång.

Vi har följande följder av 3 olika element från mängden $\{1, 2, 3, 4\}$; vi skriver $abcd = (a, b, c, d)$.

123, 124, 132, 134, 142, 143, 213, 214, 231, 234, 241, 243
312, 314, 321, 324, 341, 342, 412, 413, 421, 423, 431, 432.

Ordningen spelar roll, upprepning är tillåten. Detta är det enklaste fallet; vi har n möjligheter på varje position och k olika positioner, vilket ger totalt n^k möjligheter.

Vi har följande följder av 3 element från mängden $\{1, 2, 3\}$; vi skriver $abc = (a, b, c)$:

111, 112, 113, 121, 122, 123, 131, 132, 133, 211, 212, 213, 221, 222,
223, 231, 232, 233, 311, 312, 313, 321, 322, 323, 331, 332, 333.

2 Multiplikation av genererande funktioner

Multiplikationsprincipen för genererande funktioner ger en kombinatorisk tolkning av produkten av två eller flera genererande funktioner. Principen kan formuleras på många olika sätt; vi formulerar den i termer av poängsummor i ett spel.

Vi studerar ett spel för en person bestående av ett antal omgångar. I varje omgång tilldelas spelaren ett visst antal poäng, och antalet sätt att få n poäng i en given omgång är a_n . Exempel:

- En omgång består i att singla slant tills man får klave, och poängen ges av det nödvändiga antalet slantsinglingar, inklusive den sista som ger klave. Vi har då att $a_n = 1$ för $n \geq 1$ och $a_0 = 0$, för det enda sättet att få poängen n är att först få krona $n - 1$ gånger och sedan få en avslutande klave.
- En omgång består i att kasta två sexsidiga tärningar, och poängen i en omgång ges av det totala antalet prickar. Vi får då att

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}) = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1).$$

Exempelvis är $a_6 = 5$, för vi har de möjliga utfallen $1 + 5$, $2 + 4$, $3 + 3$, $4 + 2$ och $5 + 1$.

Multiplikationsprincipen för genererande funktioner ger en formel för antalet sätt att få totalt n poäng efter k omgångar.

Sats 2.1 Låt $k \geq 1$, och låt $a_{n,k}$ vara antalet sätt att få exakt n poäng efter k omgångar. Då gäller att

$$\sum_{n \geq 0} a_{n,k} x^n = A^k,$$

där $A = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

Bevis. Antalet sätt att få poänggraden $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ i de k omgångarna är $a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_k}$. Det totala antalet sätt att få poängsumman n är alltså

$$a_{n,k} = \sum_{n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n} a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_k}.$$

Högerledet är lika med koefficienten framför x^n i utvecklingen för A^k , vilket ger det önskade resultatet. $\square$

Mer allmänt kan man tänka sig att antalet sätt att få en given poängsumma skiljer sig åt från omgång till omgång. Anta exempelvis att spelet består av två omgångar. Låt a_n vara antalet sätt att få n poäng i den första omgången och låt b_n vara antalet sätt att få n poäng i den andra omgången. Om vi låter s_n vara antalet sätt att få totalsumman n får vi på samma sätt som i Sats 2.1 att

$$\sum_{n \geq 0} s_n x^n = \left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n \geq 0} b_n x^n \right).$$

Om vi har ytterligare en omgång där c_n är antalet sätt att få n poäng erhåller vi att antalet sätt s_n att få totalsumman n på tre omgångar uppfyller sambandet

$$\sum_{n \geq 0} s_n x^n = \left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n \geq 0} b_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n \geq 0} c_n x^n \right).$$

Den allmänna multiplikationsprincipen framgår förhoppningsvis av ovanstående exempel.

3 Räkna ord som undviker vissa delord av längd 2

Studera följande två problem.

- På hur många sätt kan man bilda ett torn bestående av n röda och gula byggklossar, om regeln är att det måste finnas minst en gul kloss mellan varje par av röda klossar? För exempelvis $n = 4$ har vi möjligheterna

$$GGGG, GGGR, GGRG, GRGG, RGGG, GRGR, RGGR, RGRG,$$

där G = gul och R = röd.

- En partikel rör sig mellan fyra tillstånd som vi betecknar 0, 1, 2 och 3. Partikeln vill hela tiden klättra uppåt, vilket innebär att om den befinner sig i tillståndet $i \leq 2$ vid en given tidpunkt så kommer den att finna sig i ett tillstånd $j > i$ vid nästa tidpunkt. När den väl befinner sig i tillståndet 3 kommer den dock att halka ner till tillståndet 0 vid nästa tidpunkt. På hur många sätt kan partikeln hoppa mellan tillstånden i n steg? För exempelvis $n = 3$ har vi möjligheterna

012, 013, 023, 030, 123, 130, 230, 301, 302, 303,

där abc betecknar följden (a, b, c) av tillstånd.

Denna typ av problem är väldigt vanligt förekommande inom kombinatoriken. I båda exemplen kan vi notera att problemen kan omformuleras i termer av ord som undviker förbjudna delord av längd två. I det första exemplet ska orden undvika delordet RR , ty det måste alltid finnas minst ett G mellan varje par av R . I det andra exemplet ska orden undvika delorden 00, 10, 11, 20, 21, 22, 31, 32 och 33, ty partikeln rör sig alltid uppåt från tillstånden 0, 1 och 2 och alltid ner till 0 från tillståndet 3.

Vi ska ge en allmän metod för att attackera problem av det här slaget. Låt Q vara en uppsättning symboler; för enkelhetens skull antar vi att $Q = \{0, \dots, k-1\}$. Ett ord över Q är en ordnad följd av symboler från Q . 000, 012 och 0211121101 är exempel på ord över $\{0, 1, 2\}$.

Låt X vara en uppsättning ord över Q av längd 2. Varje ord består alltså av två symboler. Vi säger att ett ord över Q är *tillåtet* om ordet inte innehåller något delord som tillhör X . Ordet får alltså inte innehålla två på varandra följande symboler som bildar ett ord i X .

Låt a_n vara antalet tillåtna ord av längd n . Vi ska ge en systematisk metod för att hitta en linjär rekursion för talen a_n . Metoden bygger på Cayley-Hamiltons sats:

Sats 3.1 Låt M vara en kvadratisk $k \times k$ -matris med karakteristiskt polynom

$$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I - M) = \sum_{i=0}^k r_i \lambda^i.$$

Då gäller att

$$\chi_M(M) = \sum_{i=0}^k r_i M^i = 0.$$

Bevis brukar gå att hitta i grundläggande läroböcker i linjär algebra. En vanlig bevisidé är att skriva M på Jordans normalform.

Låt $M = (m_{ij})$ vara en $k \times k$ -matris vars rader och kolumner indexeras av symbolerna i Q . Vi sätter $m_{ij} = 0$ om $ij \in X$ och $m_{ij} = 1$ om $ij \notin X$; värdet på m_{ij} beror alltså på huruvida ij är ett förbjudet eller tillåtet delord.

Sats 3.2 För alla $n \geq 1$ gäller att

$$\sum_{i=0}^k r_i a_{n+i} = 0,$$

där $\chi_M(\lambda) = \sum_{i=0}^k r_i \lambda^i$.

Bevis. För $i \in Q$, låt $a_{n,i}$ vara antalet tillåtna ord av längd n som slutar med i . Definiera

$$\mathbf{v}_n = (a_{n,0}, a_{n,1}, \dots, a_{n,k-1}).$$

Notera att $\mathbf{v}_1 = (1, 1, \dots, 1)$, ty alla ord av längd 1 är tillåtna. Vi har nu sambandet

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n M, \quad (1)$$

eller, annorlunda uttryckt,

$$a_{n+1,j} = \sum_{i=0}^{k-1} a_{n,i} m_{ij}.$$

för $n \geq 1$. Om w är ett tillåtet ord som slutar med i är nämligen wj ett tillåtet ord om och endast om ij är ett tillåtet delord.

Genom upprepad användning av identiteten (1) får vi att

$$\mathbf{v}_{n+i} = \mathbf{v}_n M^i$$

för alla $i \geq 0$ och $n \geq 1$. Studera nu det karakteristiska polynomet $\chi_M(\lambda) = \sum_{i=0}^k r_i \lambda^i$. Cayley-Hamiltons sats 3.1 ger att $\sum_{i=0}^k r_i M^i = 0$, vilket medför att

$$\mathbf{v}_n \sum_{i=0}^k r_i M^i = 0 \iff \sum_{i=0}^k r_i \mathbf{v}_n M^i = 0 \iff \sum_{i=0}^k r_i \mathbf{v}_{n+i} = 0.$$

Om vi summerar koordinaterna i varje vektor $\mathbf{v}_{n+i}$ får vi slutligen

$$\sum_{i=0}^k r_i a_{n+i} = 0 \iff a_{n+k} = -\sum_{i=0}^{k-1} r_i a_{n+i}$$

för $n \geq 1$, ty $r_k = 1$. □

Naturligtvis kan vi skriva om den sista ekvationen i beviset som

$$a_n = -\sum_{i=0}^{k-1} r_i a_{n-k+i},$$

där nu $n \geq k+1$.

Som en tillämpning studerar vi problemet med röda och gula klossar från inledningen. Låt a_n vara antalet ord av längd n över $\{R, G\}$ som inte innehåller delordet RR . Vi vill visa att $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ och att a_n är ett Fibonaccital (se avsnitt 4.1 i Cameron).

Lösning. Vi definierar matrisen M som i avsnitt 3:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi har en nolla i det övre vänstra hörnet eftersom delordet RR är förbjudet. På övriga positioner har vi ettor, ty RG , GR och GG är alla tillåtna delord. M 's karakteristiska polynom är lika med

$$\chi_M(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Enligt Sats 3.1 ger detta rekursionen

$$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0 \iff a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$

vilket är den sökta rekursionen. Eftersom $a_1 = 2$ och $a_2 = 3$ blir varje tal a_n ett Fibonaccital.

Det går att lösa sådana här problem även med mer direkta kombinatoriska metoder. Som ett exempel ger vi en alternativ lösning till ovanstående problem. För $k \in \{R, G\}$, låt $a_{n,k}$ beteckna antalet tillåtna ord av längd n som slutar med k . Vi ser att

$$\begin{aligned} a_{n,R} &= a_{n-1,G}, \\ a_{n,G} &= a_{n-1,R} + a_{n-1,G}. \end{aligned}$$

Ett ord av längd $n-1$ som slutar med R kan nämligen utvidgas till ett ord av längd n genom att man lägger till G , medan ett ord som slutar med G kan utvidgas genom att man lägger till antingen R eller G . Vi drar slutsatsen att

$$a_n = a_{n-1,R} + 2a_{n-1,G}.$$

Nu får vi med samma resonemang att

$$a_{n-1,G} = a_{n-2,R} + a_{n-2,G},$$

vilket ger att

$$a_n = a_{n-1,R} + 2a_{n-1,G} = a_{n-1,R} + a_{n-1,G} + a_{n-2,R} + a_{n-2,G} = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Att a_n blir ett Fibonaccital visar man på samma sätt som ovan.

4 Catalantalen

Observera: Det vi här kallar för C_n kallar Cameron för C_{n+1} .

Ett viktigt exempel på en ickeinjär rekursion är den för Catalantalen:

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1};$$

$C_0 = 1$. Sätt $C(x) = \sum_{n \geq 0} C_n x^n$. Denna formella potensserie uppfyller ett viktigt samband som Cameron ger en mycket kortfattad förklaring till (se sidan 61). För att bena ut sambandet i mer detalj noterar vi att

$$\begin{aligned} C(x) &= C_0 + \sum_{n \geq 1} C_n x^n = 1 + \sum_{n \geq 1} \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} x^n \\ &= 1 + \sum_{i \geq 0} \sum_{n \geq i+1} C_i C_{n-i-1} x^n \\ [j = n - i - 1] &= 1 + \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} C_i C_j x^{i+j+1} \\ &= 1 + x \sum_{i \geq 0} C_i x^i \sum_{j \geq 0} C_j x^j = 1 + x(C(x))^2. \end{aligned}$$

Notera bytet av summationsordning på andra raden. Alltså har vi att

$$(C(x))^2 = \frac{C(x)}{x} - \frac{1}{x}.$$

Om vi löser denna andragradsekvation i $C(x)$ får vi att

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x},$$

där vi väljer ett minustecken (och inte ett plustecken) framför rottecknet för att täljarens konstantterm ska bli 0.

Att vi, i motsats till Cameron (se sidan 61), har ett x i nämnaren beror på att det vi kallar C_n är C_{n+1} i boken. Se Cameron för en härledning av formeln

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Ö Övningsuppgifter

Ö.1 Binomialkoefficientens värde

Syftet med denna uppgift är att ge ett bevis för att binomialkoefficienten $\binom{n}{k}$ uppfyller identiteten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Låt $0 \leq k \leq n$. Använd följande procedur för att bilda en permutation av elementen i en mängd X av storlek n .

1. Välj ut k element.
2. Bilda en ordnad följd av dessa k element.
3. Bilda en ordnad följd av de återstående $n - k$ elementen.
4. Bilda en permutation genom att sätta ihop de två följderna.

Visa med hjälp av ovanstående procedur att

$$n! = \binom{n}{k} \cdot k! \cdot (n-k)!.$$

Svårighetsgrad: E

Ö.2 Ännu en rekursion för binomialkoefficienterna

Visa att

$$\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} + \binom{n-3}{k-2} + \binom{n-3}{k-1}.$$

Svårighetsgrad: E

Ö.3 Binomialsatsen I

Använd binomialsatsen för att visa att

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^k = (-1)^n.$$

Svårighetsgrad: E

Ö.4 Binomialsatsen II

Använd binomialsatsen för att visa att

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (2+x)^k = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k.$$

Svårighetsgrad: C

Ö.5 Vem vet mest?

Vem vet mest? är en frågesporttävling på Sveriges Television där tolv deltagare tävlar om tre finalplatser. Kvalificeringstävlingen är uppdelad i två omgångar. I den första omgången får deltagarna svara på två frågor, och de som svarar fel på båda frågorna är utslagna. Den andra omgången är en sinnrikt konstruerad utslagstävling som pågår tills bara tre deltagare återstår. Dessa tre deltagare går vidare till finalen. (Vi antar att antalet personer som går vidare till den andra omgången alltid är minst tre.)

- (a) Med spelregler som ovan, visa att det finns 112640 sätt för de tolv deltagarna att fördela sig mellan grupperna “utslagna i första omgången”, “utslagna i andra omgången” och “kvalificerade för final”.
- (b) Ge ett kombinatoriskt bevis för identiteten

$$\sum_{r=k}^n \binom{n}{r} \binom{r}{k} = \binom{n}{k} 2^{n-k}.$$

(Det är tillåtet att lösa (a) genom att först lösa (b) och sedan stoppa in lämpligt valda parametrar.)

- (c) Ge ett algebraiskt bevis för identiteten i (b).

Svårighetsgrad: (a): E, (b): D, (c): C

Ö.6 Växande följder av tal I

- (a) Låt k och n vara positiva heltal sådana att $k \geq n$. Beräkna antalet heltalsföljder $(y_1, \dots, y_k)$ sådana att

$$1 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_k \leq n.$$

med egenskapen att vart och ett av talen $1, 2, \dots, n$ förekommer minst en gång bland talen $y_1, y_2, \dots, y_k$.

- (b) Låt k och n vara positiva heltal sådana att $n \leq k \leq 2n$. Beräkna antalet heltalsföljder $(y_1, \dots, y_k)$ sådana att

$$1 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_k \leq n.$$

med egenskapen att vart och ett av talen $1, 2, \dots, n$ förekommer minst en gång och högst två gånger bland talen $y_1, y_2, \dots, y_k$.

Svårighetsgrad: D

Ö.7 Växande följder av tal II

Ge ett direkt bevis för att följande två antal sammanfaller och är lika med $\binom{n+k-1}{k}$:

- Antalet heltalsföljder $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ sådana att

$$1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n + k - 1$$

(strikt olikheter).

- Antalet heltalsföljder $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ sådana att

$$1 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_k \leq n$$

(ej strikt olikheter). Detta är lika med antalet multimängder av storlek k över en mängd av storlek n .

Ledning. Försök transformera en följd av det andra slaget till en följd av det första slaget genom att addera lämpliga konstanter C_k till vart och ett av talen $b_1, b_2, \dots, b_k$. Vi vill alltså att

$$1 \leq b_1 + C_1 < b_2 + C_2 < \dots < b_k + C_k \leq n + k - 1.$$

Svårighetsgrad: C

Ö.8 Genererande funktion för tärningskast

Låt $n \geq 1$, och låt $a_{n,k}$ vara antalet sätt att få summan n då man kastar k stycken vanliga sexsidiga tärningar. Ange ett slutet uttryck för den genererande funktionen

$$\sum_{n=k}^{6k} a_{n,k} x^n.$$

Beräkna $a_{10,3}$.

Svårighetsgrad: E

Ö.9 Slantsingling

För $1 \leq n \leq r$, låt $a_{n,r}$ vara antalet sätt att singla slant r gånger så att klave dyker upp exakt n gånger och så att vi får klave vid den sista slantsinglingen.

- (a) Visa att

$$a_{n,r} = \binom{r-1}{n-1}.$$

- (b) Visa att

$$\sum_{r \geq n} \binom{r-1}{n-1} x^r = \frac{x^n}{(1-x)^n}.$$

Ledning: Dela in ovanstående slantsingling i n omgångar, och använd multiplikationsprincipen.

Svårighetsgrad: (a): E, (b): C, (c): D

Ö.10 Summor på formen $t + 2u + 3v$

Låt a_n vara antalet tripplar (t, u, v) av icke-negativa heltal sådana att $t + 2u + 3v = n$. Ge en sluten formel för $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

Svårighetsgrad: C

Ö.11 Ord som undviker 00

Låt Q beteckna alfabetet $\{0, 1, 2\}$, och låt a_n vara antalet ord över Q av längd n som inte innehåller delordet 00. Exempelvis är $a_1 = 3$, $a_2 = 8$ och $a_3 = 22$.

(a) Visa att

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

för $n \geq 3$.

(b) Visa att

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = \frac{3x + 2x^2}{1 - 2x - 2x^2}.$$

Svårighetsgrad: D

Ö.12 Ord som undviker 00 och 11

Låt Q beteckna alfabetet $\{0, 1, 2\}$, och låt a_n vara antalet ord över Q av längd n som inte innehåller delorden 00 och 11. Exempelvis är $a_1 = 3$, $a_2 = 7$ och $a_3 = 17$.

(a) Visa att det finns tal r och s sådana att $a_n = ra_{n-1} + sa_{n-2}$ för alla $n \geq 3$, och bestäm r och s .

(b) Skriv $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ som en rationell funktion.

Svårighetsgrad: D

Ö.13 Ord som undviker 01

Låt Q beteckna alfabetet $\{0, 1, 2\}$, och låt a_n vara antalet ord över Q av längd n som inte innehåller delordet 01. Exempelvis är $a_1 = 3$, $a_2 = 8$ och $a_3 = 21$. Visa att det finns tal r och s sådana att $a_n = ra_{n-1} + sa_{n-2}$ för alla $n \geq 3$, och bestäm r och s .

Svårighetsgrad: D

Ö.14 Ord som undviker ij om $|i - j| \geq 2$

Låt $Q = \{0, 1, 2, 3\}$, och låt X bestå av alla ord ij sådana att $|i - j| \geq 2$. Vi har alltså att $X = \{02, 03, 13, 20, 30, 31\}$. Låt a_n vara antalet ord över Q som undviker delorden i X .

(a) Visa att

$$a_{n+4} = 4a_{n+3} - 3a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$$

för $n \geq 1$.

(b) Man kan räkna ut att $a_1 = 10$, $a_2 = 26$, $a_3 = 68$ och $a_4 = 178$. Använd detta för att visa att $a_n = 2F_{2n+2}$ för $n \geq 1$, där F_i är det i :te Fibonacci-talet; $F_0 = F_1 = 1$.

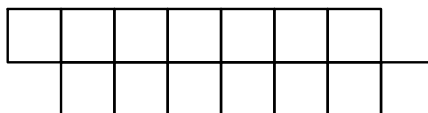
Ledning. Ett sätt att förenkla uträkningarna är att först visa att $F_{2k+4} = 3F_{2k+2} - F_{2k}$ för $k \geq 0$.

Svårighetsgrad: (a): D, (b): C

Ö.15 Grannfria konfigurationer av brickor på ett bräde

Studera ett bräde med två rader av kvadratiska rutor med $n + 1$ rutor i varje rad. Plocka nu bort nedre vänstra och övre högra rutan från brädet. Figur 1 illustrerar fallet $n = 7$. Ange en rekursionsformel för antalet sätt att placera brickor på de $2n$ återstående rutorna, där regeln är att man inte får lägga brickor på två rutor med gemensam kant.

Svårighetsgrad: B



Figur 1: Brädet i uppgift Ö.15 för $n = 7$.

Ö.16 Delmängders kardinalitet modulo 3

För varje heltal $n \geq 0$ och $k \in \{0, 1, 2\}$, låt $\beta_{n,k}$ vara antalet delmängder till $\{1, \dots, n\}$ vars kardinalitet är kongruent med k modulo 3.

(a) Använd ett kombinatoriskt resonemang för att bevisa att

$$\beta_{n+3,k} = 3 \cdot 2^n - \beta_{n,k}$$

för $n \geq 0$ och $k \in \{0, 1, 2\}$.

(b) Använd identiteten i (a) för att visa att

$$\beta_{3m,k} = \begin{cases} (8^m + 2(-1)^m)/3 & \text{om } k = 0, \\ (8^m - (-1)^m)/3 & \text{om } k \in \{1, 2\} \end{cases}$$

för alla $m \geq 0$.

Svårighetsgrad: (a): B, (b): E

Ö.17 Hoppningar av tal på avstånd högst 2

Låt a_n vara antalet sätt att dela in mängden $\{1, \dots, 2n\}$ i n par så att avståndet mellan talen i varje par är högst 2. Exempelvis är $a_2 = 2$, ty hoppningarna $\{1-2, 3-4\}$ och $\{1-3, 2-4\}$ är tillåtna, medan hoppningen $\{1-4, 2-3\}$ inte är det; avståndet mellan 1 och 4 i det första paret är större än 2. Visa att

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

för alla $n \geq 2$. Eftersom $a_0 = a_1 = 1$ får vi alltså Fibonacciföljden.

Svårighetsgrad: C

Ö.18 Hoppningar av tal på avstånd högst 3

Låt nu a_n vara antalet sätt att dela in mängden $\{1, \dots, 2n\}$ i n par så att avståndet mellan talen i varje par är högst 3. Visa att

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-4}$$

för alla $n \geq 4$.

Svårighetsgrad: A

Ö.19 Växande följder av tal III

Som bekant är $a_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$ lika med antalet heltalsföljder $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ som uppfyller olikheterna

$$1 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_k \leq n.$$

(a) Låt

$$A_n(x) = \sum_{k \geq 0} a_{n,k} x^n.$$

Ge ett kombinatoriskt bevis för att

$$A_n(x) = 1 + x \sum_{i=1}^n A_i(x).$$

Ledning: Studera det sista elementet b_k i en given följd.

(b) Använd (a) för att visa att

$$A_n(x) = \frac{1}{(1-x)^n}.$$

Svårighetsgrad: C

Ö.20 Icke-skärande hopparningar

Representera talen $1, \dots, 2n$ som punkter på en cirkel, utspridda i växande ordning medurs. För en given hopparning av dessa $2n$ punkter, dra ett linjestycke mellan varje par av hopparade punkter. Om linjestyckena inte skär varandra inuti cirkeln säger vi att hopparningen är icke-skärande. Exempelvis är hopparningen $\{1-5, 2-8, 3-4, 6-7, 9-12, 10-11\}$ av talen $1, \dots, 12$ skärande, ty linjestycket mellan punkt 1 och punkt 5 skär motsvarande linjestycke mellan 2 och 8 (studera urtavlan på en klocka). Algebraiskt kan vi uttrycka detta som att vi inte tillåter hopparningar som innehåller par $a-c$ och $b-d$ med egenskapen att

$$a < b < c < d.$$

Visa att antalet icke-skärande hopparningar av $1, \dots, 2n$ är lika med det n :te Catalanantalet C_n (C_{n+1} med Camerons notation).

Ledning. Bilda en rekursionsformel för det sökta antalet genom att studera det par som innehåller punkten $2n$.

Svårighetsgrad: B

Ö.21 Oavgjord tävling där den ena spelaren aldrig leder

Två personer A och B spelar $2n$ partier luffarschack och vinner n partier var. Efter varje omgång har A vunnit minst lika många partier som B . Visa att antalet sätt detta kan ske på är lika med det n :te Catalanantalet C_n (C_{n+1} med Camerons notation).

Ledning. Bilda en rekursionsformel för det sökta antalet genom att studera det första tillfället i tävlingen då A och B har vunnit lika många partier. Bortse från tillfället i början av tävlingen då ställningen är 0-0.

Svårighetsgrad: A