

SF2715 Tillämpad kombinatorik

Kompletterande material och övningsuppgifter

Del II

Jakob Jonsson

20 april 2009

Detta häfte innehåller kompletterande material till del II av kursen SF2715 Tillämpad kombinatorik, som ges på KTH under andra halvan av våren 2009. Se det första häftet för allmän information om häftets upplägg.

Innehåll

1 Några definitioner och fakta	2
Ö Övningsuppgifter	3
Ö.1 Partition med avseende på största gemensamma delare	3
Ö.2 En permutation på en mängd av heltalspar	3
Ö.3 Cykeluppdelning vid multiplikation modulo 13	3
Ö.4 Permutationer med lika stora cykler	4
Ö.5 Mängdpartitioner med lika stora delar	4
Ö.6 231-undvikande permutationer	4
Ö.7 Involutioner	4
Ö.8 Partitioner där hälften av elementen tillhör samma delmängd . .	5
Ö.9 Ordnade partitioner	5
Ö.10 Dartspel och Belltal	5
Ö.11 Stirlingtal av första slaget	6
Ö.12 Stirlingtal av andra slaget	6
Ö.13 Partitioner av n med högst k delar	7
Ö.14 Partitioner av kn med alla delar delbara med k	7
Ö.15 Partitioner av n som är sitt eget konjugat	7
Ö.16 Komplettering av tablåer	8
Ö.17 RSK-algoritmen I	8
Ö.18 RSK-algoritmen II	8
Ö.19 RSK-algoritmen III	8

1 Några definitioner och fakta

I uppgifter om permutationer kommer vi nästan uteslutande att använda oss av tvåradarsnotation och cykeluppdelningar för att beteckna permutationer. Låt exempelvis π definieras som $\pi(1) = 2$, $\pi(2) = 4$, $\pi(3) = 6$, $\pi(4) = 1$, $\pi(5) = 3$, $\pi(6) = 5$ och $\pi(7) = 7$. Med tvåradarsnotation får vi

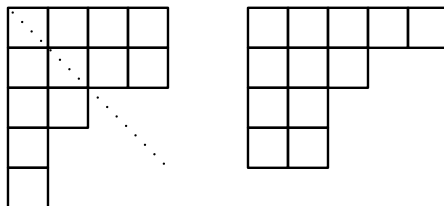
$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

medan cykeluppdelningen blir

$$\pi = (1, 2, 4)(3, 6, 5)(7).$$

Ett vanligt förekommande skrivsätt är att man utelämnar den översta raden vid tvåradarsnotation och alltså bara skriver $\pi = 2461357$. Även om detta skrivsätt är praktiskt är risken stor för sammanblandning med den cykliska permutationen $(2, 4, 6, 1, 3, 5, 7)$. Det är dessutom svårare att se vilket tal som avbildas på vilket. Vi gör ett undantag för uppgift Ö.6, där det blir opraktiskt med något annat skrivsätt än just detta.

När vi studerar talpartitioner kommer vi att använda oss av representationen av en given partition som ett diagram av kvadrater. I detta diagram har vi lika många kvadrater i rad i som storleken på den i :te största termen i partitionen, och diagrammet är vänsterjusterat. Partitionerna $(4, 4, 2, 1, 1)$ och $(5, 3, 2, 2)$ illustreras i Figur 1. Konjugatet till en partition av n är den partition som erhålls om man speglar motsvarande diagram i huvuddiagonalen; se Figur 1 för ett exempel.



Figur 1: Två partitioner som är varandras konjugat. Partitionen $(5, 3, 2, 2)$ till höger erhålls från partitionen $(4, 4, 2, 1, 1)$ till vänster genom att spegla i den markerade diagonalen.

I ett par uppgifter bildar vi permutationer och partitioner med hjälp av talteoretiska konstruktioner. Vi påminner om att den största gemensamma delaren till två tal a och b , betecknad $\gcd(a, b)$, är det största talet d sådant att d delar såväl a som b . Den minsta gemensamma multipeln av a och b , betecknad $\text{lcm}(a, b)$, är det minsta talet m sådant att m är delbart med såväl a som b . Vi har sambandet

$$\text{lcm}(a, b) \gcd(a, b) = ab.$$

Ö Övningsuppgifter

Ö.1 Partition med avseende på största gemensamma delare

Låt n vara ett positivt heltal. Man kan bilda en partition av $\{1, 2, \dots, n-1\}$ genom att låta a och b tillhöra samma mängd om och endast om $\gcd(a, n) = \gcd(b, n)$, där $\gcd(a, n)$ är lika med den största gemensamma delaren till a och n . Bestäm denna partition för $n = 6$, $n = 11$, $n = 12$ och $n = 16$.

Svårighetsgrad: E

Ö.2 En permutation på en mängd av heltalspar

Låt m och n vara positiva heltal, och låt X vara mängden av par (a, b) sådana att $0 \leq a \leq m-1$ och $0 \leq b \leq n-1$. Låt π vara permutationen på X med egenskapen att

$$\pi((a, b)) = ((a+1) \bmod m, (b+1) \bmod n).$$

Exempel: Om vi skriver paret (a, b) som ab har vi för $m = 3$ och $n = 4$ cykeluppdelningen

$$(00, 11, 22, 03, 10, 21, 02, 13, 20, 01, 12, 23)$$

och för $m = 3$ och $n = 6$ cykeluppdelningen

$$(00, 11, 22, 03, 14, 25)(01, 12, 23, 04, 15, 20)(02, 13, 24, 05, 10, 21).$$

Visa att π är en cyklisk permutation om och endast om $\gcd(m, n) = 1$, där $\gcd(m, n)$ är lika med den största gemensamma delaren till m och n .

Svårighetsgrad: D

Ö.3 Cykeluppdelning vid multiplikation modulo 13

Mängden $\mathbb{Z}_{13}^* = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$ bildar en grupp under multiplikation modulo 13. För $j \in \mathbb{Z}_{13}^*$, låt π_j beteckna permutationen som ges av multiplikation med j modulo 13; vi har alltså att $\pi_j(i) = (j \cdot i) \bmod 13$ för $i \in \mathbb{Z}_{13}^*$.

(a) Ange cykeluppdelningen för permutationerna π_3 och π_5 .

(b) Ange en sluten formel för elementet i rad r och kolumn k i följande tabell:

		k			
		0	1	2	3
r	0	1	5	12	8
	1	3	2	10	11
	2	9	6	4	7

Svårighetsgrad: (a): E, (b): C

Ö.4 Permutationer med lika stora cykler

Låt n och k vara positiva heltal. Visa att det finns

$$\frac{(nk)!}{n! \cdot k^n}$$

permutationer av nk element med en cykeluppdelning bestående av n cykler med vardera k element.

Svårighetsgrad: C

Ö.5 Mängdpartitioner med lika stora delar

Låt n och k vara positiva heltal. Visa att det finns

$$\frac{(nk)!}{n! \cdot (k!)^n}$$

partitioner av en mängd med nk element bestående av n delmängder med vardera k element.

Svårighetsgrad: C (lättare om du gjort uppgift Ö.4)

Ö.6 231-undvikande permutationer

En permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n$ är 231-undvikande om det inte finns index $i < j < k$ sådana att $a_k < a_i < a_j$. Förklaringen till denna beteckning är att $a_i a_j a_k$ bildar "mönstret" 231; a_i är näst störst, a_j är störst och a_k är minst. Exempelvis är 3127465 en 231-undvikande permutation, medan 4127365 inte är det, ty 4127365 innehåller delsekvensen 473, som bildar "mönstret" 231.

Visa att antalet 231-undvikande permutationer av n element är lika med det n :te Catalantalet C_n .

Ledning. Försök hitta en rekursion genom att studera positionen för det största elementet n i en given 231-undvikande permutation.

Svårighetsgrad: A

Ö.7 Involutioner

Visa att följande permutationer är involutioner:

- Den permutation π av mängden $\{0, 1, 2, \dots, 2m-1\}$ som ges av

$$\pi(k) = (k+m) \bmod 2m.$$

- Den permutation π av mängden $\{0, 1, 2, \dots, 2m-1\}$ som ges av

$$\pi(k) = (a-k) \bmod 2m,$$

där a är en heltalskonstant.

- Permutationen π^5 , då π är permutationen av mängden $\{1, 2, \dots, 10\}$ som ges av

$$\pi(k) = (2k) \bmod 11.$$

Svårighetsgrad: E

Ö.8 Partitioner där hälften av elementen tillhör samma delmängd

Låt $n \geq 1$, och låt H_n vara antalet partitioner av en mängd med $2n$ element sådana att det finns en delmängd i partitionen som innehåller exakt n element. Visa att

$$H_n = \binom{2n}{n} \cdot \left(B_n - \frac{1}{2}\right),$$

där B_n är det n :te Belltalet.

Svårighetsgrad: E

Ö.9 Ordnade partitioner

Belltalet B_n ger som bekant antalet partitioner av mängden $\{1, \dots, n\}$. Låt P_n vara antalet *ordnade* partitioner av mängden $\{1, \dots, n\}$, där en ordnad partition är en följd $(Y_1, \dots, Y_k)$ sådan att $\{Y_1, \dots, Y_k\}$ är en (oordnad) partition. Exempelvis är $P_3 = 13$, ty vi har 13 ordnade partitioner av tre element:

$$(123), (1, 23), (23, 1), (2, 13), (13, 2), (3, 12), (12, 3), \\ (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).$$

Visa att

$$P_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} P_i$$

för $n \geq 1$ och att

$$P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i \frac{x^i}{i!} = \frac{1}{2 - e^x}.$$

Svårighetsgrad: C

Ö.10 Dartspel och Belltal

Med n darpilar, numrerade från 1 till n , och med en tavla med n ringar, numrerade från 1 till n utifrån och in, kan man spela följande spel.

- (1) Pilarna kastas i nummerordning.
- (2) Man måste träffa tavlan med alla pilar.
- (3) Man får inte sätta en pil i en given ring förrän man har satt pilar i alla ringar utanför den givna ringen. I synnerhet måste den första pilen sättas i den yttersta ringen med nummer 1.

Man vinner om man lyckas kasta alla n pilar enligt ovanstående regler. Exempelvis ger följande kastsviter vinst för $n = 3$:

$$(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (1, 2, 3).$$

Visa att antalet sätt att vinna på är lika med det n :te Belltalet.

Svårighetsgrad: B

Ö.11 Stirlingtal av första slaget

Absolutbeloppet $c_{n,k}$ av Stirlingtalet $s_{n,k}$ av första slaget anger antalet permutationer av $\{1, \dots, n\}$ med exakt k cykler. Observera att $c_{n,k} = 0$ om $n < k$.

(a) Visa att

$$c_{n,k} = \sum_{r=1}^{n-k+1} \frac{(n-1)!}{(n-r)!} c_{n-r,k-1}$$

genom att i en given permutation studera den cykel som innehåller elementet n .

(b) Låt

$$f_k(x) = \sum_{n \geq k} c_{n,k} \frac{x^n}{n!}.$$

Använd (a) för att visa att

$$f'_k(x) = \frac{f_{k-1}(x)}{1-x}$$

för $k \geq 1$ (vi definierar $f_0(x) = 1$).

(c) Använd (b) för att visa att

$$f_k(x) = \frac{(-\ln(1-x))^k}{k!}.$$

Svårighetsgrad: A-C

Ö.12 Stirlingtal av andra slaget

Stirlingtalet $S_{n,k}$ av andra slaget anger antalet partitioner av $\{1, \dots, n\}$ i exakt k delmängder. Observera att $S_{n,k} = 0$ om $n < k$.

(a) Visa att

$$S_{n,k} = \sum_{r=1}^{n-k+1} \binom{n-1}{r-1} S_{n-r,k-1}$$

genom att i en given partition studera den delmängd som innehåller elementet n .

(b) Låt

$$f_k(x) = \sum_{n \geq k} S_{n,k} \frac{x^n}{n!}.$$

Använd (a) för att visa att

$$f'_k(x) = e^x f_{k-1}(x)$$

för $k \geq 1$ (vi definierar $f_0(x) = 1$).

(c) Använd (b) för att visa att

$$f_k(x) = \frac{(e^x - 1)^k}{k!}.$$

Svårighetsgrad: A-C (lättare om du gjort uppgift Ö.11)

Ö.13 Partitioner av n med högst k delar

Låt $k, n \geq 1$. Visa att antalet partitioner av talet n med högst k delar är lika med antalet partitioner av n sådana att varje del är högst k . Exempelvis har vi för $n = 5$ och $k = 3$ att

$$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1$$

och att

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 3 + 1 + 1 = 3 + 2,$$

alltså fem partitioner i bägge fallen.

Svårighetsgrad: E

Ö.14 Partitioner av kn med alla delar delbara med k

Låt $n, k \geq 1$. Visa att antalet partitioner av talet kn sådana att varje del är delbar med k är lika med det totala antalet partitioner av talet n .

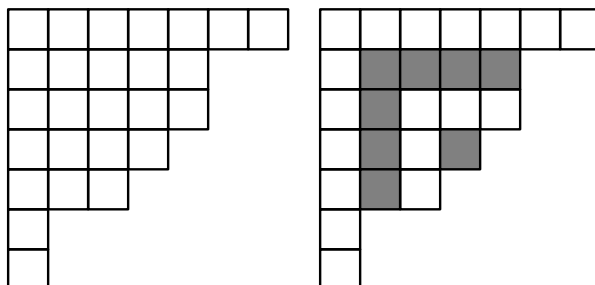
Svårighetsgrad: E

Ö.15 Partitioner av n som är sitt eget konjugat

Ge ett övertygande argument för att antalet partitioner av n som sammanfaller med sitt eget konjugat (se avsnitt 1) är lika med antalet partitioner av n i delar som alla är udda och sinsemellan olika.

Ledning. Studera bilden till höger i Figur 2.

Svårighetsgrad: B



Figur 2: Exempel på en partition som är sitt eget konjugat; kolumn i och rad i har samma längd för alla i . Bilden till höger ger en ledtråd till uppgift Ö.15.

Ö.16 Komplettering av tablåer

Visa att var och en av de tre delvis ifyllda tablåerna i Figur 3 kan kompletteras till en fullständig tablå på precis ett sätt. Ange de unika fullständiga tablåerna.

			7
			12
4	10	14	

			5	8		14
4			11			

			5	14
2		7		
11		13		

Figur 3: De tre delvis ifyllda tablåerna i uppgift Ö.16.

Svårighetsgrad: E

Ö.17 RSK-algoritmen I

Använd RSK-algoritmen på permutationerna

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Förklara sambandet mellan de två resulterande paren av tablåer.

Svårighetsgrad: E

Ö.18 RSK-algoritmen II

Använd RSK-algoritmen på permutationen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$. Förklara sambandet mellan de två resulterande tablåerna.

Svårighetsgrad: E

Ö.19 RSK-algoritmen III

Låt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & b_n & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

vara en permutation sådan att

$$\begin{aligned} a_1 &< a_2 < a_3 < \cdots < a_{n-1} < a_n \\ b_1 &< b_2 < b_3 < \cdots < b_{n-1} < b_n \end{aligned}$$

och $a_i < b_i$ för $1 \leq i \leq n$. Vad blir resultatet då man använder RSK-algoritmen på denna permutation? Motivera ditt svar med ett bevis.

Ledning om du kör fast: Försök få en idé genom att studera ett specialfall, exempelvis

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 10 & 1 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Lägg märke till hur tablåerna ser ut efter k steg för varje givet k .

Svårighetsgrad: C