

SF2715 Tillämpad kombinatorik

Kompletterande material och övningsuppgifter

Del III

Jakob Jonsson

28 april 2009

Detta häfte innehåller kompletterande material till del III av kursen SF2715 Tillämpad kombinatorik, som ges på KTH under andra halvan av våren 2009. Se det första häftet för allmän information om häftets upplägg.

Flera studenter har påpekat att de inte tycker att graderingen av uppgifterna i tidigare häften stämmer överens med deras egen uppfattning om uppgifternas svårighetsgrad. Ta därför graderingen med en rejäl nypa salt. Observera dock att vissa uppgifter blir lättare när man väl kan "tricket". Graderingen av en uppgift är tänkt att ge en uppskattning av svårighetsgraden på uppgiften för en person som har sett tricket i ett tidigare sammanhang. Räkna med att en hel del trick från dessa häften kommer att gå att återanvända på tentamen.

Utöver övningsuppgifter innehåller häftet ett par avsnitt med teori:

Avsnitt 1: Kvadratiske gittergrafer. Vi definierar klassen av kvadratiske gittergrafer. Sådana grafer dyker upp i ett par av övningsuppgifterna.

Avsnitt 2: Maximala flöden i nätverk. Vi preciserar definitionen av ett flöde i ett nätverk och anger en primitiv men teoretiskt användbar algoritm för att bestämma ett maximalt flöde.

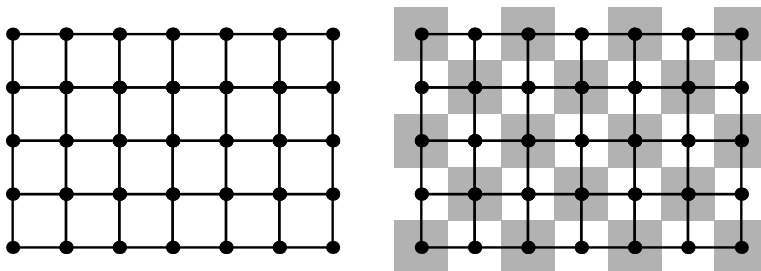
Innehåll

1	Kvadratiska gittergrafer	3
2	Flöden i nätverk	3
2.1	Definition	3
2.2	Algoritm för att hitta ett maximalt flöde	4
Ö	Övningsuppgifter	6
Ö.1	Minimalt uppspännande träd i gittergraf	6
Ö.2	Minimalt uppspännande träd i hyperkub	6
Ö.3	Unikt minimalt uppspännande träd	7
Ö.4	Hamiltoncykler i bipartita grafer	7
Ö.5	Hamiltoncykler i gittergrafer	7
Ö.6	Hamiltoncykler och perfekta matchningar	8
Ö.7	Grafer med Hamiltonstig men utan Hamiltoncykler	8
Ö.8	Gasledningar	9
Ö.9	Flöden i nätverk med flera sänkor	9
Ö.10	Maximala flöden med olika riktningar mellan två givna hörn . . .	10
Ö.11	Konstruktion av bipartit graf med flödesalgoritm	10
Ö.12	Diametern av en union	11
Ö.13	Kanttäckningar	11
Ö.14	Knesergrafer	12
Ö.15	Färgning av centrala Europa	13
Ö.16	Färgning av en cykel	13
Ö.17	Färgning av grafer med gemensamt hörn	14
Ö.18	Färgning av grafer med gemensam klick	14
Ö.19	Färgning av korsformad graf	15
Ö.20	Kromatiska polynom och oberoende mängder	15
Ö.21	Planär framställning av grafer	16
Ö.22	Onlinespel med planära grafer	16
Ö.23	Planära egenskaper hos Petersengrafen	17
Ö.24	Acykliska orienteringar (fördjupningsuppgift)	18

1 Kvadratiska gittergrafer

I ett par uppgifter studerar vi *kvadratiska gittergrafer*. Låt $r \geq 1$ och $k \geq 1$. Vi definierar den kvadratiska gittergraf $G_{r,k}$ på följande sätt: $G_{r,k}$ har rk hörn, ordnade i r rader och k kolumner. Vi har alltså ett hörn i rad i och kolumn j för $1 \leq i \leq r$ och $1 \leq j \leq k$. Två hörn är sammanbundna om de ligger intill varandra på en given rad eller i en given kolumn. I Figur 1 illustrerar vi grafen $G_{5,7}$.

Ibland kan det vara användbart att rita en gittergraf på ett schackbräde, precis som vi har gjort till höger i Figur 1. Observera att varje kant går mellan en grå och en vit ruta på brädet. I synnerhet är $G_{r,k}$ bipartit.



Figur 1: Gittergraf av storleken 5×7 . Till höger är grafen ritad på ett schackbräde.

2 Flöden i nätverk

Kursbokens definition av flöden i nätverk är en aning oklar. För att undvika missförstånd presenterar vi här den gängse definitionen. Vi ger dessutom en enkel algoritm för att bestämma ett maximalt flöde.

2.1 Definition

Låt D vara en riktad graf, och anta att varje kant (u, v) i D är försedd med en icke-negativ och reellvärd *kapacitet* $c(u, v)$. Vi definierar $c(u, v) = 0$ om (u, v) inte är en kant i D . Fixera två hörn, en *källa* s och en *sänka* t . Ett *flöde* är en funktion $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ sådan att följande gäller.

- (1) $f(u, v) \leq c(u, v)$ för alla u och v .
- (2) $f(v, u) = -f(u, v)$ för alla u och v .
- (3) $\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$ för alla $u \neq s, t$.

I praktiken anger $f(u, v)$ *nettoflödet* från u till v . Om kanterna (u, v) och (v, u) finns med i D kan vi nämligen ha ett nollskilt flöde a genom kanten (u, v) från u till v och ett annat nollskilt flöde b genom kanten (v, u) från v till u . Nettoflödet från u till v blir då $a - b$.

Summan $\sum_{v \in V} f(s, v)$ är *storleken* på flödet. (2) och (3) ger att

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{u \in V} \sum_{v \in V} f(u, v) = \sum_{u \in V \setminus \{s, t\}} \sum_{v \in V} f(u, v) + \sum_{v \in V} f(s, v) + \sum_{v \in V} f(t, v) \\ &= \sum_{v \in V} f(s, v) + \sum_{v \in V} f(t, v) = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, t). \end{aligned}$$

Storleken kan därmed även definieras som $\sum_{v \in V} f(v, t)$. Ett flöde f på D är *maximalt* om det inte finns något större flöde på D .

Ett *snitt* i D är en mängd X av riktade kanter sådan att varje riktad stig från s till t använder någon kant i X . Storleken på snittet är $\sum_{(u,v) \in X} c(u, v)$, och snittet är *minimalt* om det inte finns något mindre snitt i D . Observera att storleken på ett snitt definieras i termer av kanternas kapaciteter i D , inte i termer av något specifikt flöde.

Den sats som på engelska heter "Max-flow Min-cut Theorem" (11.9.2 i Cameron) säger att storleken på ett maximalt flöde sammanfaller med storleken på ett minimalt snitt.

För att undvika hårklyverier och teknikaliteter gör vi i den här kursen några förenklande antaganden:

- Vi antar att det inte finns några kanter som slutar i s och inte heller några kanter som börjar i t . Detta bör rimligen inte uppfattas som en allvarlig inskränkning.
- Vi antar att alla kapaciteter är heltalsvärda. Detta är i de flesta praktiska tillämpningar ingen inskränkning. Om exempelvis kapaciteterna är rationella tal (exempelvis decimaltal med tio decimaler) kan man multiplicera dem med nämnarnas minsta gemensamma multipel. Se avsnitt 11.9 i Cameron för information om det allmänna fallet då kapaciteterna är reellvärda.

2.2 Algoritm för att hitta ett maximalt flöde

Det finns många algoritmer för att hitta ett maximalt flöde i ett nätverk. Den vi presenterar här är inte den snabbaste, men den är lätt att beskriva, och den är smidig att arbeta med.

Vi har alltså en riktad graf D med en källa s och en sänka t . Alla kapaciteter är icke-negativa och heltalsvärda. Målet är att hitta ett maximalt flöde i D . Vi kommer i själva verket att hitta ett heltalsvärt flöde.

1. Börja med ett godtyckligt flöde f (exempelvis nollflödet).
2. Upprepa följande två steg tills vi hittar ett maximalt flöde:
 - (i) Undersök om det finns en följd av olika hörn

$$(s = v_0, v_1, \dots, v_d = t)$$

sådan att $f(v_j, v_{j+1}) < c(v_j, v_{j+1})$ för $0 \leq j \leq d-1$. Observera att vi mycket väl kan ha att $f(v_j, v_{j+1}) < 0 = c(v_j, v_{j+1})$. Om det inte finns en sådan följd avslutar vi algoritmen; f är ett maximalt flöde.

- (ii) Modifiera flödet f genom att addera 1 till $f(v_j, v_{j+1})$ för $0 \leq j \leq d-1$.

I praktiken är det förstås mer effektivt i steg 2 (ii) att addera Δ till $f(v_j, v_{j+1})$, där Δ är maximalt sådant att $f(v_j, v_{j+1}) + \Delta \leq c(v_j, v_{j+1})$ för $0 \leq i \leq d - 1$.

Storleken på ett maximalt flöde begränsas uppåt av storleken på ett minimalt snitt, vilket innebär att algoritmen är färdig efter ett ändligt antal steg.

Mer information om algoritmen finns i Appendix C i boken *Applied Mathematical Programming* av Bradley, Hax och Magnanti. Denna bok kan laddas ned i sin helhet från följande adress:

<http://web.mit.edu/15.053/www/>

Ö Övningsuppgifter

Ö.1 Minimalt uppspännande träd i gittergraf

I gittergrafen $G_{r,k}$ (se avsnitt 1), ge alla horisontella (vågräta) kanter vikten 1 och alla vertikala (lodräta) kanter vikten 2. Beräkna totalvikten på ett minimalt uppspännande träd i $G_{r,k}$.

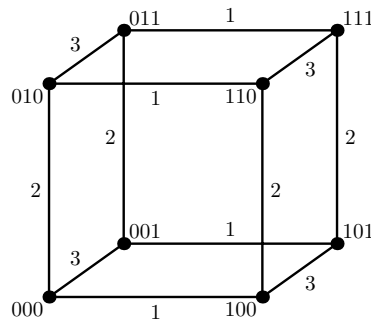
Svårighetsgrad: D

Ö.2 Minimalt uppspännande träd i hyperkub

Låt $n \geq 1$, och låt H_n ha som hörn alla binära ord av längd n . Två hörn är sammanbundna om och endast om de skiljer sig åt på exakt en position. Detta innebär att H_n har formen av en n -dimensionell hyperkub. Se Figur 2 för fallet $n = 3$, då vi får den 3-dimensionella kuben. Definiera kantvikter genom att ge vikten k till varje kant som går mellan två binära ord som skiljer sig åt på position k (räknat från vänster). Visa att ett minimalt uppspännande träd har totalvikten $2^{n+1} - n - 2$.

Ledning: Använd induktion över n .

Svårighetsgrad: B-C



Figur 2: Grafen H_3 med kantvikter som i uppgift Ö.2.

Ö.3 Unikt minimalt uppspännande träd

Låt $G = (V, E)$ vara en sammanhängande graf med reellvärda kantvikter $\{w(e) : e \in E\}$ sådana att det inte finns två kanter med exakt samma vikt. Vi har alltså att $w(e) \neq w(e')$ om $e \neq e'$.

- (a) Visa att G har ett unikt minimalt uppspännande träd.

Ledning: Studera två uppspännande träd T och U . Låt e vara minimal med avseende på vikt sådan att e bara finns med i ett av träden, säg T . Visa att $U + e$ innehåller ett uppspännande träd med lägre vikt än U .

- (b) Visa att följande två egenskaper hos ett uppspännande träd i G är ekvivalenta:

- T är det minimala uppspännande trädet i G .
- Varje kant e i G som ej tillhör T har maximal vikt bland de kanter som ingår i den unika cykeln i $T + e$.

Svårighetsgrad: A-B

Ö.4 Hamiltoncykler i bipartita grafer

Låt G vara en bipartit graf. Det finns med andra ord en partition $\{A, B\}$ av G 's hörnmängd sådan att alla kanter i G har en ändpunkt i A och en ändpunkt i B . Anta att G har en Hamiltoncykel. Visa att $|A| = |B|$.

Svårighetsgrad: E

Ö.5 Hamiltoncykler i gittergrafer

- (a) Hitta en Hamiltoncykel i var och en av gittergraferna $G_{4,6}$ och $G_{5,6}$ (se avsnitt 1).
- (b) Anta att r och k båda är udda. Visa att $G_{r,k}$ inte innehåller någon Hamiltoncykel.

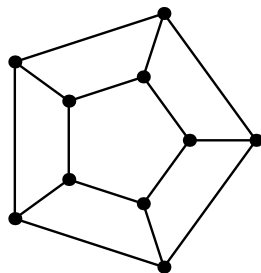
Svårighetsgrad: (a): E, (b): C

Ö.6 Hamiltoncykler och perfekta matchningar

En *perfekt matchning* i en graf med $2m$ hörn är en mängd M bestående av m kanter sådana att varje hörn i grafen finns med i exakt en kant i M .

- (a) Anta att G är en graf med $2m$ hörn sådan att G innehåller en Hamiltoncykel. Visa att man kan hitta två perfekta matchningar M_1 och M_2 i G sådana att $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ (det vill säga ingen kant finns med i både M_1 och M_2).
- (b) Anta nu att G innehåller en Hamiltoncykel och att varje hörn i G har exakt tre grannar. Visa att det finns en partition $\{M_1, M_2, M_3\}$ av kantmängden i G sådan att M_1, M_2, M_3 alla är perfekta matchningar.
- (c) För grafen i Figur 3, hitta en partition $\{M_1, M_2, M_3\}$ av kantmängden sådan att M_1, M_2, M_3 alla är perfekta matchningar.

Svårighetsgrad: (a): D, (b): C, (b): C



Figur 3: Grafen i uppgift Ö.6 (c).

Ö.7 Grafer med Hamiltonstig men utan Hamiltoncykler

Låt G vara en graf på hörnmängden $\{1, \dots, n\}$. Anta att G har en kant mellan i och $i + 1$ för $1 \leq i \leq n - 1$. Detta innebär att G innehåller Hamiltonstigen $(1, 2, 3, \dots, n)$. Anta vidare att G inte har någon Hamiltoncykel.

- (a) Visa att det inte finns något hörn i , $3 \leq i \leq n - 1$, sådant att både kanten $(1, i)$ och kanten $(i - 1, n)$ finns med i G .
- (b) Visa att det inte finns hörn i och j , $2 \leq i < j \leq n - 1$, sådana att kanterna $(1, i)$, (j, n) och $(i - 1, j + 1)$ alla finns med i G .
- (c) Visa att det inte finns hörn i och j , $2 \leq i < j \leq n - 1$, sådana att kanterna $(1, j)$, (i, n) och $(i - 1, j - 1)$ alla finns med i G .

Ledning: Rita!

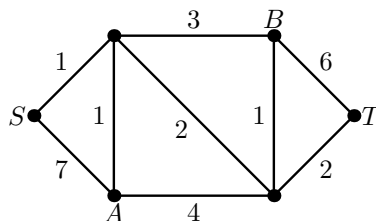
Svårighetsgrad: D

Ö.8 Gasledningar

I Figur 4 illustreras ett nätverk av gasledningar mellan två länder S och T ; varje lednings kapacitet anges i hundratal miljoner kubikmeter gas per vecka. Alla ledningar kan användas i båda riktningarna.

- (a) Ange ett maximalt flöde i nätverket, och visa att flödet är maximalt.
- (b) För att täcka sina framtida behov på 800 miljoner kubikmeter importerad gas per vecka trycker landet T på för en ny ledning mellan länderna A och B . Vilken kapacitet behövs på denna nya ledning för att uppnå det önskade flödet?

Svårighetsgrad: E



Figur 4: Nätverket i uppgift Ö.8.

Ö.9 Flöden i nätverk med flera sänkor

I denna uppgift får du använda dig av att det finns en känd metod för att beräkna ett maximalt flöde i ett nätverk med exakt en källa och exakt en sänka.

- (a) Låt D vara ett nätverk med en källa s och flera sänkor $t_1, \dots, t_r$, alla skilda från s . Med ett flöde i D menar vi ett flöde med nettoflöde 0 i alla hörn $v \notin \{s, t_1, \dots, t_r\}$, och storleken på flödet är nettoflödet ut ur s . Ange en metod för att bestämma ett maximalt flöde i D .
- (b) För givna icke-negativa parametrar $p_1, \dots, p_r$, ange en metod för att hitta ett flöde med egenskapen att nettoflödet till t_i är exakt p_i för $1 \leq i \leq r$, under förutsättning att ett sådant flöde existerar.

Svårighetsgrad: C

Ö.10 Maximala flöden med olika riktningar mellan två givna hörn

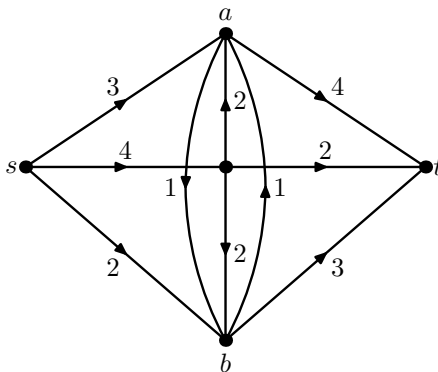
Syftet med denna uppgift är att visa att det kan finnas två hörn a och b i ett nätverk med egenskapen att tecknet på $f(a, b)$ beror på valet av maximalt flöde f (och alltså inte är entydigt bestämt av kanternas kapacitet).

- (a) Låt D vara definierad som i Figur 5. Visa att det finns tre maximala flöden f_1 , f_2 och f_3 sådana att $f_1(a, b) > 0$, $f_2(a, b) = 0$ och $f_3(a, b) < 0$.

Ledning: Hitta först ett maximalt flöde, och utgå sedan från detta flöde för att konstruera flöden med de önskade egenskaperna.

- (b) Konstruera ett nätverk av storlek två med bara fyra hörn s , t , a och b sådant att det finns tre maximala flöden f_1 , f_2 och f_3 sådana att $f_1(a, b) > 0$, $f_2(a, b) = 0$ och $f_3(a, b) < 0$. Som vanligt är s källan och t sänkan.

Svårighetsgrad: (a): C, (b): B



Figur 5: Nätverket i uppgift Ö.10.

Ö.11 Konstruktion av bipartit graf med flödesalgoritm

Låt $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ och $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ vara två mängder av hörn, och låt $c_1, \dots, c_n$ och $d_1, \dots, d_m$ vara icke-negativa heltal sådana att

$$\sum_{i=1}^n c_i = \sum_{j=1}^m d_j.$$

Man vill bilda en bipartit graf med kanter från hörnen i A till hörnen i B så att hörnet a_i har exakt c_i grannar i B för alla i och så att hörnet b_j har exakt d_j grannar i A för alla j . Formulera detta problem som problemet att hitta ett maximalt flöde i ett nätverk, och ange vilka egenskaper detta flöde måste ha för att vi ska få en bipartit graf med önskade egenskaper. (Du behöver bara formulera problemet, inte lösa det.)

Svårighetsgrad: B-C

Ö.12 Diametern av en union

Unionen $G \cup H$ av två grafer $G = (V, E)$ och $H = (W, F)$ är definierad som grafen med hörnmängd $V \cup W$ och kantmängd $E \cup F$. Låt $G_1 = (V_1, E_1)$ och $G_2 = (V_2, E_2)$ vara två sammanhängande grafer sådana att hörnmängderna har en icke-tom skärning; $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ är icke-tom.

- (a) Visa att

$$\text{diam}(G_1 \cup G_2) \leq \text{diam}(G_1) + \text{diam}(G_2),$$

där $\text{diam}(G)$ är diametern av grafen G .

- (b) Hitta ett exempel där $|V_1 \cap V_2| = 1$ och

$$\text{diam}(G_1 \cup G_2) < \text{diam}(G_1) + \text{diam}(G_2),$$

alltså strikt olikhet.

Svårighetsgrad: D

Ö.13 Kanttäckningar

En *kanttäckning* av en graf G är en delmängd W till G 's hörnmängd V sådan att varje kant i G har minst en ändpunkt i W . Låt $\tau(G)$ vara det minimala talet t sådant att G har en kanttäckning av storlek t .

- (a) För ett hörn v , låt $\tau_v(G)$ vara det minsta talet t sådant att det finns en kanttäckning av G av storlek t som innehåller hörnet v . Visa att

$$\tau(G) \leq \tau_v(G) \leq \tau(G) + 1$$

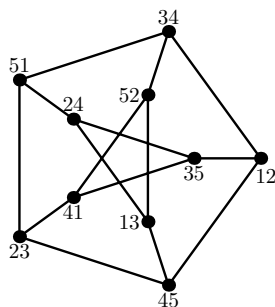
för varje hörn v .

- (b) G är *hörnkritisk* om $\tau(G - v) < \tau(G)$ för varje hörn v , där $G - v$ är den inducerade delgrafen till G på hörnmängden $V \setminus \{v\}$. Visa att en graf G är hörnkritisk om och endast om $\tau(G) = \tau_v(G)$ för varje hörn v i G .
- (c) G är *kantkritisk* om $\tau(G - e) < \tau(G)$ för varje kant e i G . Visa att alla kompletta grafer K_n och alla udda cykler C_{2m+1} är kantkritiska.

Svårighetsgrad: C

Ö.14 Knesergrafer

Låt $n \geq 2k$. Bilda en graf $H_{n,k}$ med ett hörn för varje delmängd till $\{1, \dots, n\}$ av storlek k och med en kant mellan två hörn A och B om och endast om A och B är disjunkta. $H_{n,k}$ är en så kallad *Knesergraf*. Se Figur 6 för Knesergrafens $H_{5,2}$, även kallad *Petersengrafen*.



Figur 6: Petersengrafen $H_{5,2}$, den mest välkända Knesergrafen. Vi skriver ab för att beteckna hörnet $\{a, b\}$.

- (a) Visa att varje hörn i $H_{n,k}$ har $\binom{n-k}{k}$ grannar.
- (b) Beräkna diameter och omfång (*girth*) för Petersengrafen $H_{5,2}$.
- (c) Låt (A, B, C) vara en stig i $H_{n,k}$. Visa att

$$|A \setminus C| \leq n - 2k.$$

- (d) Mer allmänt, låt $(A_1, A_2, \dots, A_{2i+1})$ vara en stig i $H_{n,k}$, där $i \geq 1$. Visa att

$$|A_1 \setminus A_{2i+1}| \leq i(n - 2k).$$

Dra slutsatsen att det inte finns någon cykel av udda längd i $H_{n,k}$ vars längd understiger $\frac{n}{n-2k}$.

Ledning: Använd följande olikhet för ändliga mängder:

$$|X \setminus Z| \leq |X \setminus Y| + |Y \setminus Z|.$$

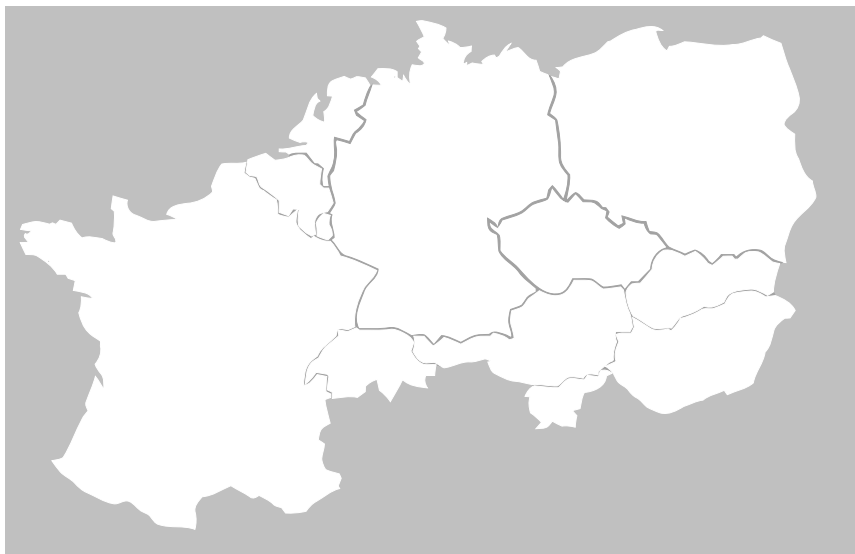
Svårighetsgrad: (a): E, (b): C, (c): E, (d): A-B

Ö.15 Färgning av centrala Europa

Figur 7 utgör en karta över centrala Europa med följande tolv länder: Polen, Tjeckien, Slovakien, Ungern, Slovenien, Österrike, Schweiz, Frankrike, Luxemburg, Belgien, Nederländerna och Tyskland.

- (a) Visa att det inte räcker med tre färger för att färga länderna så att länder med gemensam gräns har olika färger.
- (b) Med Luxemburg borttaget, visa att det nu går att färga länderna med gult, blått och rött så att länder med gemensam gräns har olika färger. Hur många sådana färgningar finns det?

Svårighetsgrad: E



Figur 7: Centrala Europa.

Ö.16 Färgning av en cykel

För $n \geq 3$, visa att

$$\chi_{C_n}(r) = (r-1)^n + (-1)^n(r-1),$$

där C_n är cykeln på n hörn.

Svårighetsgrad: C

Ö.17 Färgning av grafer med gemensamt hörn

- (a) Låt G vara en graf, och låt v vara ett hörn i G . För varje heltal $r \geq 1$ och varje tillåten färg k , visa att antalet r -färgningar av G sådana att v har färgen k är $\chi_G(r)/r$.
- (b) Låt G och H vara grafer med exakt ett gemensamt hörn v . Visa att

$$\chi_{G \cup H}(r) = \frac{\chi_G(r)\chi_H(r)}{r},$$

där $G \cup H$ är unionen av graferna G och H definierad i uppgift Ö.12.

Svårighetsgrad: (a): E, (b): D

Ö.18 Färgning av grafer med gemensam klick

Denna uppgift generaliserar föregående uppgift. Del (b) är ofta användbar vid beräkning av kromatiska polynom.

- (a) Låt G vara en graf, och anta att hörnmängden $\{w_1, \dots, w_k\}$ bildar en klick av storlek k i G . För varje heltal $r \geq k$ och varje följd av parvis olika tillåtna färger $c_1, \dots, c_k$, visa att antalet r -färgningar av G sådana att v_i har färgen c_i för $1 \leq i \leq k$ är

$$\frac{\chi_G(r)}{r(r-1)\cdots(r-k+1)} = \frac{(r-k)!\chi_G(r)}{r!}.$$

- (b) Låt G och H vara grafer med gemensam hörnmängd W sådana att de inducerade graferna $G(W)$ och $H(W)$ båda är lika med den kompletta grafen på W . Visa att

$$\chi_{G \cup H}(r) = \frac{\chi_G(r)\chi_H(r)}{r(r-1)\cdots(r-k+1)} = \frac{(r-k)!\chi_G(r)\chi_H(r)}{r!},$$

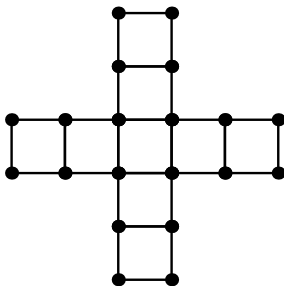
där $k = |W|$.

Svårighetsgrad: D

Ö.19 Färgning av korsformad graf

Beräkna $\chi_P(r)$, då P är grafen i Figur 8.

Svårighetsgrad: C



Figur 8: Grafen P i uppgift Ö.19.

Ö.20 Kromatiska polynom och oberoende mängder

En hörnmängd U är *oberoende* i en graf G om inga par av hörn i U är sammanbundna i G . Detta innebär att ingen kant har båda sina ändpunkter i U . Låt $\alpha(G)$ vara det största talet a sådant att G har en oberoende mängd av storlek a . Exempelvis är $\alpha(K_n) = 1$ för $n \geq 1$ och $\alpha(K_n - e) = 2$ för $n \geq 2$, där e är en godtycklig kant i den kompletta grafen K_n .

- (a) Visa att det kromatiska talet $\chi(G)$ uppfyller

$$\alpha(G)\chi(G) \geq n,$$

där n är antalet hörn i G .

- (b) Låt $f_r(G)$ vara antalet oberoende mängder i G av storlek r . Låt $e = \{v, w\}$ vara en kant i G . Visa att

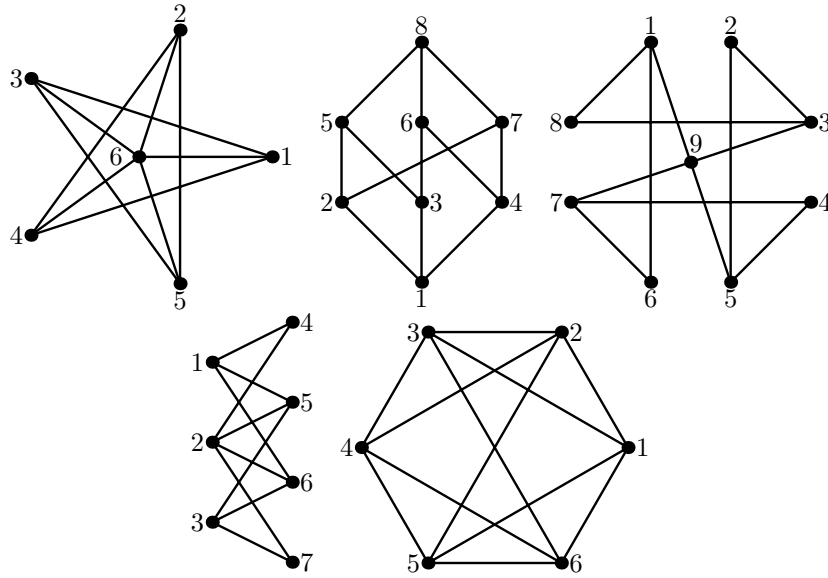
$$f_r(G) = f_r(G - e) + f_{r-1}(G') - f_{r-1}(G/e),$$

där G' är den graf som erhålls om vi tar bort hörnen v och w .

Svårighetsgrad: C

Ö.21 Planär framställning av grafer

Rita graferna i Figur 9 i planet så att inga kanter korsar varandra. Var noga med att ange hörnens namn.



Figur 9: De fem graferna i uppgift Ö.21 som ska ritas utan korsande kanter.

Svårighetsgrad: C-E

Ö.22 Onlinespel med planära grafer

Försök klara en så hög nivå som möjligt i spelet på sidan med följande adress:

<http://www.planarity.net>

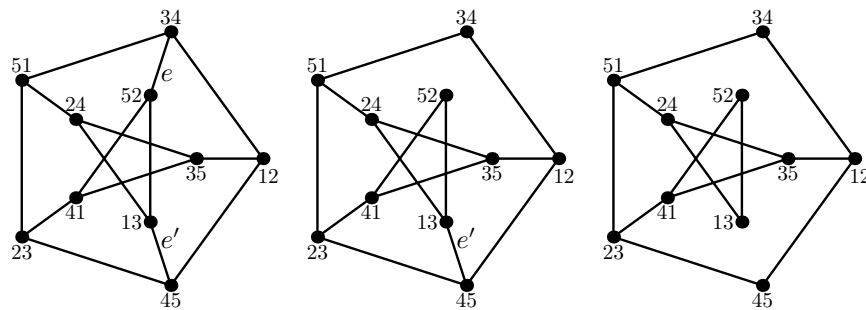
Ö.23 Planära egenskaper hos Petersengrafen

- (a) Använd Kuratowski-Wagners sats för att visa att Petersengrafen P till vänster i Figur 10 inte är planär.
- (b) Använd Kuratowski-Wagners sats för att visa att grafen $P - e$ i mitten av Figur 10 inte är planär.

Ledning: Försök hitta minoren $K_{3,3}$.

- (c) Är grafen $P - \{e, e'\}$ till höger i Figur 10 planär?

Svårighetsgrad: (a): D, (b): A, (c): E



Figur 10: Till vänster Petersengrafen P , i mitten grafen $P - e$ och till höger grafen $P - \{e, e'\}$.

Ö.24 Acykliska orienteringar (fördjupningsuppgift)

Vi får en *orientering* av en graf G om vi gör varje kant vw i G riktad på ett av de två möjliga sätten: antingen från v till w eller från w till v . Orienteringen är *acyklisk* om den saknar riktade cykler.

Låt $a(G)$ vara antalet acykliska orienteringar av G . Denna uppgift går ut på att visa att $a(G)$ är lika med $|\chi_G(-1)|$, det vill säga absolutbeloppet av det kromatiska polynomet till G uträknat i punkten -1 . Fixera en kant $e = vw$.

- (a) Anta att D är en acyklisk orientering av $G - e$. Visa att minst en av $D + (v, w)$ eller $D + (w, v)$ är en acyklisk orientering av G .
- (b) Låt a_2 vara antalet acykliska orienteringar av G sådana att vi kan ändra riktningen på kanten e och fortfarande ha en acyklisk orientering. Sätt $a_1 = a(G) - a_2$. Låt vidare b_2 vara antalet acykliska orienteringar D av $G - e$ sådana att både $D + (v, w)$ och $D + (w, v)$ är acykliska. Sätt $b_1 = a(G - e) - b_2$. Visa följande två likheter:

$$\begin{aligned}a_1 &= b_1, \\a_2 &= 2b_2.\end{aligned}$$

- (c) Visa att $b_2 = a(G/e)$, och dra slutsatsen att

$$a(G) = a(G - e) + a(G/e).$$

- (d) Visa att

$$a(G) = (-1)^k \chi_G(-1),$$

där k är antalet hörn i G .