

SF2715 Tillämpad kombinatorik  
Kompletterande material och övningsuppgifter  
Del IV

Jakob Jonsson

28 april 2009

Detta häfte innehåller kompletterande material till del IV av kursen SF2715 Tillämpad kombinatorik, som ges på KTH under andra halvan av våren 2009. Se det första häftet för allmän information om häftets upplägg.

Teoridelen av häftet innehåller en lista över vanligt förekommande permutationsgrupper. Vi diskuterar även Burnsides lemma och cykelindexsatsen, alltså materialet från kapitel 15 i Cameron. Som ett exempel på hur Burnsides lemma kan användas diskuterar vi "omärkta" färgningar av grafer.

# Innehåll

|          |                                                         |           |
|----------|---------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Inledning</b>                                        | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Några vanliga permutationsgrupper</b>                | <b>4</b>  |
| <b>3</b> | <b>Burnsides lemma</b>                                  | <b>7</b>  |
| <b>4</b> | <b>Omärkta färgningar av grafer</b>                     | <b>10</b> |
| <b>5</b> | <b>Cykelindex</b>                                       | <b>12</b> |
| <b>Ö</b> | <b>Övningsuppgifter</b>                                 | <b>15</b> |
| Ö.1      | Cykliska binära följder, del 1 . . . . .                | 15        |
| Ö.2      | Par av hörn i en kvadrat med fyra löv . . . . .         | 15        |
| Ö.3      | Kantfärgningar av kuben, del 1 . . . . .                | 16        |
| Ö.4      | Omärkta färgningar av en hexagon . . . . .              | 16        |
| Ö.5      | Samband mellan färgningar och urvalsproblem . . . . .   | 16        |
| Ö.6      | Omärkta färgningar av tomma grafer . . . . .            | 16        |
| Ö.7      | Omärkta färgningar av närapå kompletta grafer . . . . . | 17        |
| Ö.8      | Cykliska binära följder, del 2 . . . . .                | 17        |
| Ö.9      | Kantfärgningar av kuben, del 2 . . . . .                | 17        |
| Ö.10     | Matriser under gruppverkan, del 1 . . . . .             | 17        |
| Ö.11     | Matriser under gruppverkan, del 2 . . . . .             | 17        |
| Ö.12     | Två cirkelskivor indelade i fem tårtbitar . . . . .     | 18        |

# 1 Inledning

Låt  $V$  vara en ändlig mängd. Det mesta vi ska göra kan uttryckas i termer av färgningar av elementen i  $V$ , alltså funktioner från  $V$  till en given mängd  $S$ . Ett viktigt specialfall är  $S = \{0, 1\}$ . I detta fall kan man identifiera en färgning med den delmängd till  $V$  som får färgen 1. I vissa fall kommer vi att ha restriktioner angående färgning av intilliggande element, men lika ofta kommer vi inte att ha några sådana restriktioner.

För en permutation  $g$  på mängden  $V$  och en färgning  $c : V \rightarrow S$ , definiera  $cg = c \circ g$ . Detta är alltså den färgning som ger färgen  $c \circ g(v)$  till elementet  $v$  för varje  $v \in V$ . Vi säger att  $g$  *verkar* på färgningen  $c$  genom att avbilda  $c$  på  $cg$ .

Observera att  $cg$  ger samma färg till  $v$  som  $c$  ger till  $g(v)$ . Ekvivalent uttryckt har vi att  $c$  ger samma färg till  $v$  som  $cg$  ger till  $g^{-1}(v)$ .

En mängd  $G$  av permutationer på  $V$  är en *permutationsgrupp* på  $V$  om mängden är sluten under sammansättning och invers. Följande gäller alltså:

- För alla  $g_1, g_2 \in G$  gäller att  $g_1g_2 = g_1 \circ g_2 \in G$ .
- För alla  $g \in G$  gäller att  $g^{-1} \in G$ .

Låt  $G$  vara en permutationsgrupp på  $V$ . Låt  $X$  vara en mängd av färgningar med följande egenskap:

- För varje  $g \in G$  och  $c \in X$  gäller att  $cg \in X$ .

Vi säger att  $G$  *verkar* på  $X$ . Observera för  $g, h \in G$  och  $c \in X$  att

$$(cg)h = (cg) \circ h = c \circ g \circ h = c \circ (gh) = c(gh).$$

Notera i synnerhet att  $(cg)g^{-1} = c$  för alla  $g \in G$  och  $c \in X$ .

Vi betraktar två färgningar  $c$  och  $c'$  som ekvivalenta om det finns ett grupp-element  $g$  sådant att  $cg = c'$ . Att detta verkligen ger en ekvivalensrelation visar man med hjälp av axiomen för en permutationsgrupp och identiteten  $(cg)h = c(gh)$ . Man brukar kalla ekvivalensklasserna för *banor* (*orbits*).

För ett exempel, låt  $X$  vara mängden av alla färgningar med färgerna  $1, \dots, r$  av hörnen i en regelbunden  $n$ -hörning. Numrera hörnen  $0, \dots, n-1$  i stigande följd medurs. Låt  $c$  vara en färgning, och låt  $g$  vara permutationen  $(1, 2, 3, \dots, n)$ . Enligt vad vi kom fram till tidigare har vi att  $cg$  är den färgning som ger  $i$  den färg som  $g(i) = (i+1) \bmod n$  tidigare hade. Om man vill kan man se det som att  $g$  roterar  $n$ -hörningen ett snäpp medurs medan färgerna ligger stilla. Ett alternativt synsätt är att låta  $n$ -hörningen ligga stilla och i stället rotera färgerna. Då får man dock rotera "baklänges" så att färgen för hörn  $i$  hamnar på hörn  $(i-1) \bmod n$ . Permutationen  $g$  genererar en grupp med  $n$  element som ger upphov till en uppdelning av  $X$  i banor. Två färgningar tillhör samma bana om och endast om den ena kan erhållas från den andra genom rotation.

I nästa avsnitt ger vi exempel på viktiga permutationsgrupper. I efterföljande avsnitt diskuterar vi sedan Burnsides lemma, omärkta färgningar av grafer och cykelindexsatsen.

## 2 Några vanliga permutationsgrupper

Vi nämner några vanliga permutationsgrupper som är bra att känna till. Om inte annat anges uttrycker vi alltid permutationer i cykeluppdelningsformat. Vi kommer ofta att utelämna kommatecknen och skriva  $(a_1 a_2 \cdots a_k)$  i stället för  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ . Om en permutation består av  $e_i$  cykler av längd  $i$  säger vi att permutationen har cykelstruktur  $1^{e_1} 2^{e_2} \cdots n^{e_n}$ ;  $n$  är storleken på  $V$ . (I praktiken utelämnar vi alla  $i$  sådana att  $e_i = 0$ , och vi kommer oftast att skriva cykelstrukturen i omvänd ordning med de längsta cyklerna först.)

**Den symmetriska gruppen  $S_n$ , en grupp med  $n!$  element.** Denna grupp består av alla permutationer på mängden  $\{1, \dots, n\}$ . Några viktiga exempel:

- $S_3$ . Denna grupp består av identiteten  $(1)(2)(3)$ , de tre transpositionerna  $(12)(3)$ ,  $(13)(2)$  och  $(23)(1)$  och de två rotationerna  $(123)$  och  $(132)$ . Identiteten har cykelstruktur  $1^3$  (tre 1-cykler), transpositionerna har cykelstruktur  $2^1 1^1$  (en 2-cykel och en 1-cykel) och rotationerna har cykelstruktur  $3^1$  (en 3-cykel).
- $S_4$ . Denna grupp består av 24 element:

| Cykelstruktur | Antal gruppelament |
|---------------|--------------------|
| $1^4$         | 1                  |
| $2^1 1^2$     | 6                  |
| $2^2$         | 3                  |
| $3^1 1^1$     | 8                  |
| $4^1$         | 6                  |

(Antalet gruppelament med en given cykelstruktur kan beräknas med hjälp av proposition 13.5 i Cameron.)

- $S_5$ . Denna grupp består av 120 element:

| Cykelstruktur | Antal gruppelament |
|---------------|--------------------|
| $1^5$         | 1                  |
| $2^1 1^3$     | 10                 |
| $2^2 1^1$     | 15                 |
| $3^1 1^2$     | 20                 |
| $3^1 2^1$     | 20                 |
| $4^1 1^1$     | 30                 |
| $5^1$         | 24                 |

**Den cykliska gruppen  $C_n$ , en grupp med  $n$  element.** Denna grupp består av alla permutationer av hörnen på en  $n$ -hörning som uppstår genom rotation. Vi diskuterade denna gruppverkan i slutet av föregående avsnitt. Se Exempel 2 i avsnitt 15.4 i Cameron för mer information om gruppen. Den centrala egenskapen hos  $C_n$  är att permutationen som svarar mot rotation med  $r$  steg (alltså  $360r/n$  grader) består av  $d$  cykler med vardera  $n/d$  element, där  $d$  är den största gemensamma delaren till  $n$  och  $r$ . Rotation med 9 steg av en 24-hörning svarar alltså mot en permutation med 3 cykler med vardera  $24/3$  element, ty  $\gcd(24, 9) = 3$ .

**Den dihedrala gruppen  $D_n$ , en grupp med  $2n$  element.** Denna grupp består av alla permutationer av hörnen på en  $n$ -hörning som uppstår genom rotation och spegling. Än en gång hänvisar vi till Exempel 2 i avsnitt 15.4 i Cameron. Några specialfall bör man känna till extra väl:

- $D_4$ . Denna grupp verkar på en kvadrat med hörn 1, 2, 3 och 4, räknat medurs. De åtta gruppelmenten är som följer:

|                          |                                      |
|--------------------------|--------------------------------------|
| (1)(2)(3)(4)             | Identiteten                          |
| (1234)<br>(1432)         | Rotation $\pm 90^\circ$              |
| (13)(24)                 | Rotation $180^\circ$                 |
| (14)(23)<br>(12)(34)     | Spegling i vågrät eller lodrät linje |
| (13)(2)(4)<br>(24)(1)(3) | Spegling i diagonal                  |

- $D_5$ . Denna grupp verkar på en regelbunden pentagon (femhörning) med hörn 1, 2, 3, 4 och 5, räknat medurs. De tio gruppelmenten är som följer:

|                                                                         |                                                     |
|-------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| (1)(2)(3)(4)(5)                                                         | Identiteten                                         |
| (12345)<br>(15432)                                                      | Rotation $\pm 72^\circ$                             |
| (13524)<br>(14253)                                                      | Rotation $\pm 144^\circ$                            |
| (34)(52)(1)<br>(45)(13)(2)<br>(51)(24)(3)<br>(12)(35)(4)<br>(23)(41)(5) | Spegling i linje genom ett hörn och motstående kant |

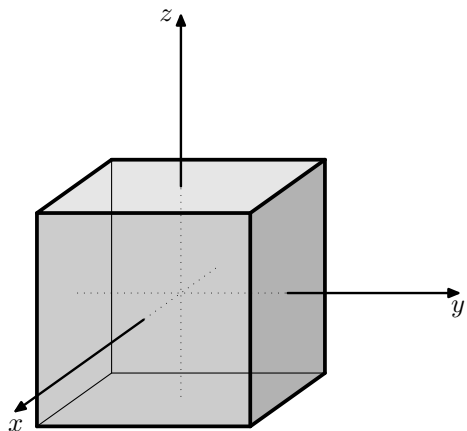
- $D_6$ . Denna grupp verkar på en regelbunden hexagon (sexhörning) med hörn 1, 2, 3, 4, 5 och 6, räknat medurs. De tolv gruppelmenten är som följer:

|                                                    |                                              |
|----------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| (1)(2)(3)(4)(5)(6)                                 | Identiteten                                  |
| (123456)<br>(165432)                               | Rotation $\pm 60^\circ$                      |
| (135)(246)<br>(153)(264)                           | Rotation $\pm 120^\circ$                     |
| (14)(25)(36)                                       | Rotation $180^\circ$                         |
| (12)(45)(36)<br>(23)(56)(41)<br>(34)(61)(52)       | Spegling i linje genom två motstående kanter |
| (26)(35)(1)(4)<br>(31)(46)(2)(5)<br>(42)(51)(3)(6) | Spegling i linje genom två motstående hörn   |

Notera att  $D_6$  har en mer komplicerad struktur än  $D_5$ . Anledningen är att 5 är ett primtal, medan 6 är sammansatt.

**Rotationsgruppen för den 3-dimensionella kuben, en grupp med 24 element.** Vi får en permutation av sidorna i en 3-dimensionell kub genom att rotera kuben. Mängden av rotationer ger upphov till en permutationsgrupp av storlek 24. En rotation är nämligen entydigt bestämd av vilka sidor som utgör locket och framsidan på kuben. Det finns sex val för locket, och för varje lock finns det fyra val för framsidan, vilket ger  $6 \cdot 4 = 24$  möjligheter.

I avsnitt 15.2 beskriver Cameron (utan att gå in på detaljer) hur gruppelmenten kan delas in i fem olika klasser. Vi kan beskriva dessa klasser explicit genom att först placera hörnen till kuben i de åtta punkterna  $\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 = (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ , där  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$  och  $e_3 = (0, 0, 1)$ . Se Figur 1 för en illustration.



Figur 1: Kub med hörnen i punkterna  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ .

Låt oss studera cykelstrukturen hos elementen i gruppen. Varje gruppelment är alltså en permutation på en mängd med sex element. Vi får följande tabell:

| Cykelstruktur | Antal element | Beskrivning                                                |
|---------------|---------------|------------------------------------------------------------|
| $1^6$         | 1             | Identiteten                                                |
| $2^2 1^2$     | 3             | Rotation $180^\circ$ runt $x$ -, $y$ - eller $z$ -axeln    |
| $4^1 1^2$     | 6             | Rotation $\pm 90^\circ$ runt $x$ -, $y$ - eller $z$ -axeln |
| $2^3$         | 6             | Rotation $180^\circ$ runt axeln $e_i \pm e_j$ , $i < j$    |
| $3^2$         | 8             | Rotation $\pm 120^\circ$ runt axeln $e_1 \pm e_2 \pm e_3$  |

Några kommentarer:

- Observera att rotation medurs runt axeln  $v$  är ekvivalent med rotation moturs runt axeln  $-v$ .
- Rotation  $180^\circ$  runt en axel på formen  $e_i \pm e_j$  innebär att vi roterar ett halvt varv runt en linje som går igenom två motstående kanter. Exempelvis har vi i fallet då axeln är  $e_1 + e_2$  att vi får en rotation runt en linje genom kanten mellan hörnen i punkterna  $(e_1 + e_2) + e_3$  och  $(e_1 + e_2) - e_3$  och kanten mellan hörnen i punkterna  $-(e_1 + e_2) + e_3$  och  $-(e_1 + e_2) - e_3$ .
- Rotation runt en axel på formen  $v = e_1 \pm e_2 \pm e_3$  innebär att vi roterar runt en linje genom hörnen i punkterna  $v$  och  $-v$ .

Vi kan även bilda en grupp bestående av de permutationer av kubens åtta hörn som uppstår vid rotation. Än en gång har vi en grupp med 24 element. Vi får följande tabell:

| Cykelstruktur | Antal element | Beskrivning                                                |
|---------------|---------------|------------------------------------------------------------|
| $1^8$         | 1             | Identiteten                                                |
| $2^4$         | 3             | Rotation $180^\circ$ runt $x$ -, $y$ - eller $z$ -axeln    |
| $4^2$         | 6             | Rotation $\pm 90^\circ$ runt $x$ -, $y$ - eller $z$ -axeln |
| $2^4$         | 6             | Rotation $180^\circ$ runt axeln $e_i \pm e_j$ , $i < j$    |
| $3^2 1^2$     | 8             | Rotation $\pm 120^\circ$ runt axeln $e_1 \pm e_2 \pm e_3$  |

En tredje möjlighet är att studera gruppen bestående av de permutationer av kubens tolv kanter som uppstår vid rotation; se övningsuppgift Ö.3.

**Produktgrupper.** Låt  $G$  och  $H$  vara två permutationsgrupper på mängderna  $V$  respektive  $W$ . Vi kan bilda en permutationsgrupp  $G \times H$  på produktmängden  $V \times W$ . Definiera nämligen

$$(g, h)(v, w) = (g(v), h(w)).$$

Vi noterar att

$$(g, h)(g', h') = (gg', hh').$$

Vidare är inversen till  $(g, h)$  lika med  $(g^{-1}, h^{-1})$ .

Låt oss beräkna cykelstrukturen för ett element  $(g, h)$  i ett specifikt exempel. Låt  $V = \{1, 2\}$  och  $W = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ , och anta att  $g = (1, 2)$  och  $h = (3, 4, 6)(5, 7)$ . Med skrivsättet  $ab = (a, b)$  för element i  $V \times W$  ser vi att  $(g, h)$  har cykeluppdelningen

$$(13, 24, 16, 23, 14, 26)(15, 27)(25, 17)$$

och därmed cykelstrukturen  $6^1 2^2$ . Se övningsuppgift 2 i häftet som hör till del II för fler exempel.

En viktig observation är att vi kan identifiera en färgning  $c : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow S$  med den  $m \times n$ -matris som har egenskapen att elementet i rad  $i$  och kolumn  $j$  är lika med  $c(i, j)$  för  $1 \leq i \leq m$  och  $1 \leq j \leq n$ . I uppgifterna Ö.10 och Ö.11 studerar vi binära matriser under gruppverkan.

### 3 Burnside's lemma

Låt  $G$  vara en permutationsgrupp på en ändlig mängd  $V$ , och anta att  $G$  verkar på en mängd  $X$  av färgningar av  $V$ . Burnside's lemma ger ett smidigt sätt att räkna antalet banor (ekvivalensklasser) i  $X$  som gruppen  $G$  ger upphov till. Låt  $Y$  vara en bana i  $X$ . För varje  $c, c' \in Y$ , låt

$$G(c, c') = \{g : cg = c'\}.$$

Burnside's lemma bygger på följande identitet, som vi visar senare i avsnittet:

$$|G(c, c')| = |G|/|Y|. \quad (1)$$

Identiteten medför i synnerhet att  $|G(c, c)| = |G|/|Y|$  för alla  $c \in Y$ , vilket innebär att

$$\sum_{c \in Y} |G(c, c)| = |G|.$$

Vi har därmed att

$$\sum_{c \in X} |G(c, c)| = |G| \cdot A, \quad (2)$$

där  $A$  är antalet banor. Varje bana ger nämligen tillskottet  $|G|$ , och vi har  $A$  banor. Summan i (2) räknar alla par  $(g, c)$  sådana att  $g \in G$ ,  $c \in X$  och  $cg = c$ . Tricket i Burnsidess lemma är att summera över  $G$  i stället för  $X$ .

**Hjälpsats 3.1 (Burnsidess lemma)** *För varje gruppelement  $g$ , låt  $\text{fix}(g)$  vara antalet färgningar  $c \in X$  sådana att  $cg = c$ . Antalet banor i  $X$  som gruppen  $G$  ger upphov till är lika med*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{fix}(g).$$

*Bevis.* I summan  $\sum_{g \in G} \text{fix}(g)$  räknar vi varje par  $(g, c)$  sådant att  $cg = c$  precis en gång. Detta var precis vad vi gjorde även i (2), vilket medför att summan är lika med  $|G|$  gånger antalet banor i  $X$ . Division med  $|G|$  ger det önskade resultatet.

Det återstår därmed enbart att visa formeln (1). Låt  $c$  och  $c'$  tillhöra samma bana  $Y$ , och låt  $g \in G(c, c')$ . Elementet  $g$  har alltså egenskapen att  $cg = c'$ ; ett sådant  $g$  existerar per definition av bana. Definiera  $\varphi : G(c, c) \rightarrow G(c, c')$  som  $\varphi(h) = hg$ . Detta är verkligen en funktion från  $G(c, c)$  till  $G(c, c')$ , ty

$$c\varphi(h) = c(hg) = (ch)g = cg = c'$$

om  $h \in G(c, c)$ . Vidare är  $\varphi$  en bijektion, ty  $\varphi$  har en invers  $\psi$  definierad som  $\psi(h) = hg^{-1}$ . Alltså är  $|G(c, c)| = |G(c, c')|$ . Som en konsekvens har vi för alla  $c, c' \in Y$  att

$$|G| = \sum_{c'' \in Y} |G(c, c'')| = \sum_{c'' \in Y} |G(c, c)| = |Y| \cdot |G(c, c)| = |Y| \cdot |G(c, c')|,$$

vilket ger (1). Detta avslutar beviset av Burnsidess lemma.  $\square$

Vi har följande villkor för när  $cg = c$ :

**Hjälpsats 3.2** *För varje  $g \in G$  och  $c \in X$  gäller att  $cg = c$  om och endast om varje cykel i cykeluppdelningen av  $g$  är enfärgad. Med detta menar vi att  $c(v) = c(w)$  om  $v$  och  $w$  är två element i  $V$  som tillhör samma cykel i  $g$ .*

*Bevis.* Anta att  $c = cg$ . Låt  $(v_1, \dots, v_r)$  vara en cykel i  $g$ . Vi ser att

$$c(v_i) = (cg)(v_i) = c(g(v_i)) = c(v_{(i+1) \bmod r})$$

för alla  $i$ . Alltså är alla cykler i  $g$  enfärgade.

Anta istället att  $c \neq cg$ . Detta innebär att det finns något  $v \in V$  sådant att  $c(v) \neq c(g(v))$ . Eftersom  $v$  och  $g(v)$  tillhör samma cykel innebär det att det finns en cykel i  $g$  som inte är enfärgad.  $\square$



Vi ger nu några exempel på tillämpningar av Burnsidess lemma.

**Exempel 1.** Låt  $n \geq 1$ , och betrakta två binära följder  $(b_0, \dots, b_{n-1})$  och  $(c_0, \dots, c_{n-1})$  som ekvivalenta om den ena kan erhållas från den andra via en rotation. Det finns alltså ett  $r$  sådant att  $b_i = c_{(i+r) \bmod n}$  för alla  $i$ . Den cykliska gruppen  $C_n$  verkar naturligt på mängden av binära följder. Om  $g$  betecknar rotation med ett snäpp har vi att  $g^r$  avbildar  $(b_0, \dots, b_{n-1})$  på  $(b_r, b_{1+r}, \dots, b_{n-1+r})$ , där alla index beräknas modulo  $n$ . Observera att man kan identifiera en binär följd med en färgning av hörnen i en  $n$ -hörning med färgerna 0 och 1. Som vi beskrivit tidigare verkar  $C_n$  genom att rotera  $n$ -hörningen.

Låt oss använda Burnsidess lemma för att se hur man kan beräkna antalet ekvivalensklasser av binära följder av längd  $n$  med  $k$  ettor. Studera ett gruppelament  $g^r$ . Elementet  $g^r$  avbildar en binär följd  $(b_0, \dots, b_{n-1})$  på sig själv om och endast om  $b_i = b_{(i+r) \bmod n}$  för alla  $i$ . Sätt  $d = \gcd(n, r)$ . Genom att använda oss av samma resonemang som i beviset för Lemma 15.4.1 i Cameron inser vi att  $g^r$  består av  $d$  cykler bestående av vardera  $n/d$  element.

Enligt Hjälpssats 3.2 fixerar  $g^r$  en färgning om och endast om varje cykel i  $g^r$  är enfärgad. Om  $k$  inte är delbart med  $n/d$  finns det därför ingen färgning med  $k$  ettor som fixeras av  $g^r$ . Om  $k$  är delbart med  $n/d$  får vi en färgning med  $k$  ettor genom att välja färgen 1 till exakt  $k/(n/d) = kd/n$  av cyklerna. Detta kan göras på  $\binom{d}{kd/n}$  olika sätt. Skriv för enkelhetens skull  $[n, r] = \gcd(n, r)$ . Burnsidess lemma ger att det sökta antalet ekvivalensklasser är

$$\frac{1}{n} \sum_r \binom{[n, r]}{k \cdot [n, r]/n},$$

där vi summerar över alla  $r \in \{0, \dots, n-1\}$  sådana att  $k$  är delbart med  $n/[n, r]$ .

Exempelvis har vi då  $(n, k) = (6, 3)$  att  $k = 3$  är delbart med  $n/[n, r] = 6/[6, r]$  om och endast om  $r$  är jämnt. Det sökta antalet är alltså

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \left( \binom{[6, 0]}{3 \cdot [6, 0]/6} + \binom{[6, 2]}{3 \cdot [6, 2]/6} + \binom{[6, 4]}{3 \cdot [6, 4]/6} \right) \\ &= \frac{1}{6} \left( \binom{6}{3} + \binom{2}{1} + \binom{2}{1} \right) = \frac{20 + 2 + 2}{6} = 4. \end{aligned}$$

$(1, 1, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 1, 0)$  är exempel på representanter för de fyra olika ekvivalensklasserna.

Om i stället  $(n, k) = (6, 4)$  har vi att  $k = 4$  är delbart med  $n/[n, r] = 6/[6, r]$  om och endast om  $r$  är delbart med 3. Den här gången får vi därmed att

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \left( \binom{[6, 0]}{4 \cdot [6, 0]/6} + \binom{[6, 3]}{4 \cdot [6, 3]/6} \right) \\ &= \frac{1}{6} \left( \binom{6}{4} + \binom{3}{2} \right) = \frac{15 + 3}{6} = 3. \end{aligned}$$

Vi ser att  $(1, 1, 1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 1, 1, 0)$  är exempel på representer för de olika ekvivalensklasserna.

Se övningsuppgift Ö.1 för fler exempel.

**Exempel 2.** Detta exempel liknar exemplet i avsnitt 15.2 i Cameron, men vi studerar färgningar av hörnen i stället för sidorna. Vi vill räkna antalet sätt att färga hörnen på en kub med  $r$  färger, där två färgningar anses identiska om den ena kan överföras i den andra via en rotation av kuben. Vi tillåter två intilliggande hörn att ha samma färg. Låt  $g$  vara ett gruppelement med  $k$  cykler. För att beräkna  $\text{fix}(g)$ , alltså antalet färgningar som fixeras av  $g$ , noterar vi att Hjälpssats 3.2 ger att vi har exakt  $r$  val för var och en av de  $k$  cyklerna. Multiplikation ger att  $\text{fix}(g) = r^k$ . Enligt avsnitt 2 har vi ett element med cykelstruktur  $1^8$ , nio element med struktur  $2^4$ , sex element med struktur  $4^2$  och åtta element med struktur  $3^2 1^2$ . Vi summerar situationen i följande tabell.

| Cykelstruktur | Antal $g$ | $\text{fix}(g)$ |
|---------------|-----------|-----------------|
| $1^8$         | 1         | $r^8$           |
| $2^4$         | 9         | $r^4$           |
| $4^2$         | 6         | $r^2$           |
| $3^2 1^2$     | 8         | $r^4$           |

Burnsides lemma ger därmed att antalet banor av färgningar är lika med

$$\frac{1}{24} (r^8 + 9 \cdot r^4 + 6 \cdot r^2 + 8 \cdot r^4) = \frac{r^2(r^6 + 17r^2 + 6)}{24}.$$

I specialfallet  $r = 2$  får vi att antalet banor är lika med

$$\frac{2^2(2^6 + 17 \cdot 2^2 + 6)}{24} = \frac{64 + 68 + 6}{6} = \frac{138}{6} = 23.$$

## 4 Omärkta färgningar av grafer

Låt  $G$  vara en graf. Vi låter  $\text{Aut}(G)$  beteckna automorfgruppen på  $G$ .  $\text{Aut}(G)$  består alltså av alla permutationer  $\pi$  på hörnmängden  $V$  sådana att  $ab$  utgör en kant i  $G$  om och endast om  $\pi(a)\pi(b)$  utgör en kant i  $G$ . Låt  $r \geq 1$ , och låt  $X$  vara mängden av  $r$ -färgningar av  $G$ , alltså färgningar med färgerna  $1, \dots, r$  sådana att två sammanbundna hörn har olika färg. Precis som i tidigare avsnitt betraktar vi två färgningar i  $G$  som ekvivalenta om det finns en automorfi som avbildar den ena färgningen på den andra. Vi säger att en bana, alltså en ekvivalensklass av färgningar, är en *omärkt* (*unlabelled*) färgning. De ursprungliga färgningarna kallar vi för *märkta* (*labelled*).

Som bekant ges antalet märkta färgningar av  $G$  med  $r$  färger av det kromatiska polynomet  $f_G(r)$ .<sup>1</sup> I detta avsnitt använder vi Burnsides lemma för att visa att även antalet omärkta färgningar ges av ett polynom.

Låt  $\pi$  vara en automorfi på  $G$ . Bilda en graf  $G/\pi$ , där vi har ett hörn för varje cykel i  $\pi$ . Dra en kant mellan två cykler  $\omega_1$  och  $\omega_2$  om och endast om det

<sup>1</sup>Polynomet betecknades  $\chi_G(r)$  i häftet som hör till del III.

finns hörn  $u_1$  i  $\omega_1$  och  $u_2$  i  $\omega_2$  sådana att det finns en kant mellan  $u_1$  och  $u_2$ . Vi tillåter öglor och drar en sådan vid  $\omega$  om det finns hörn  $u$  och  $v$  i  $\omega$  som är sammanbundna. Observera att det kromatiska polynomet av en graf som innehåller en ögla är lika med noll. En sådan graf har nämligen inga tillåtna färgningar överhuvudtaget.

**Sats 4.1** Låt  $\tilde{f}_G(r)$  beteckna antalet omärkta färgningar av grafen  $G$  med  $r$  färger. Då är

$$\tilde{f}_G(r) = \frac{1}{|\text{Aut}(G)|} \sum_{\pi \in \text{Aut}(G)} f_{G/\pi}(r).$$

I synnerhet är  $\tilde{f}_G(r)$  ett polynom i  $r$ .

*Bevis.* Enligt Burnside's lemma har vi att antalet omärkta färgningar med  $r$  färger ges av

$$\tilde{f}_G(r) = \frac{1}{|\text{Aut}(G)|} \sum_{\pi \in \text{Aut}(G)} \alpha^\pi(r),$$

där  $\alpha^\pi(r)$  är antalet färgningar som fixeras av  $\pi$ . Enligt Hjälpssats 3.2 fixerar  $\pi$  en färgning om och endast om varje cykel i  $\pi$  är enfärgad. Vi kan alltså identifiera en sådan färgning med en färgning av cyklerna i  $\pi$ , och villkoret för att en färgning ska vara tillåten är att två cykler  $\omega_1$  och  $\omega_2$  inte får ha samma färg om det finns en kant  $(u_1, u_2)$  sådan att  $u_1$  ligger i  $\omega_1$  och  $u_2$  ligger i  $\omega_2$ . Detta är ekvivalent med att säga att vi har en tillåten färgning av hörnen i  $G/\pi$ , vilket ger att  $\alpha^\pi(r) = f_{G/\pi}(r)$ .  $\square$

Som exempel studerar vi  $C_4$ , grafen med fyra hörn 1, 2, 3, 4 och med fyra kanter (1, 2), (2, 3), (3, 4) och (1, 4). Automorfgruppen för  $C_4$  är  $D_4$ , den dihedrala gruppen med fyra element. Följande tabell anger graferna  $C_4/\pi$  för de olika gruppelmenten  $\pi$  i  $D_4$ . Vi låter 0 beteckna grafer med en ögla; sådana grafer går ej att färglägga.

| $\pi$        | $C_4/\pi$ |
|--------------|-----------|
| (1)(2)(3)(4) | $C_4$     |
| (1234)       | 0         |
| (1432)       | 0         |
| (13)(24)     | $K_2$     |
| (14)(23)     | 0         |
| (12)(34)     | 0         |
| (13)(2)(4)   | $P_3$     |
| (24)(1)(3)   | $P_3$     |

$P_3$  betecknar en graf med tre hörn och två kanter. Enligt övningsuppgift 16 i häfte III har vi att

$$f_{C_4}(r) = r(r-1)(r^2 - 3r + 3).$$

Vidare har vi att  $f_{P_3}(r) = r(r-1)^2$  och  $f_{K_2}(r) = r(r-1)$ . Slutsatsen är att

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{C_4}(r) &= \frac{1}{8} (1 \cdot r(r-1)(r^2 - 3r + 3) + 1 \cdot r(r-1) + 2 \cdot r(r-1)^2) \\ &= \frac{r(r-1)}{8} ((r^2 - 3r + 3) + 1 + 2(r-1)) \\ &= \frac{r(r-1)(r^2 - r + 2)}{8}. \end{aligned}$$

Exempelvis är  $\tilde{f}_{C_4}(3) = 6$  och  $\tilde{f}_{C_4}(4) = 21$ , vilket innebär att det finns 6 omärkta färgningar med färgerna 1, 2, 3 och 21 omärkta färgningar med färgerna 1, 2, 3, 4.

## 5 Cykelindex

Låt som vanligt  $V$  vara en ändlig mängd,  $X$  en mängd av färgningar och  $G$  en permutationsgrupp på  $V$  som verkar på  $X$ . Eftersom  $G$  bevarar antalet förekomster av varje given färg kan vi studera den delmängd av  $X$  som består av alla färgningar med ett givet antal förekomster av varje färg. I det här avsnittet nöjer vi oss med att studera 2-färgningar, närmare bestämt färgningar av  $V$  med 0 och 1. Detta är ekvivalent med att studera delmängder av  $V$ ; en given färgning svarar mot delmängden av element färgade 1. Vi studerade ett par exempel på 2-färgningar i avsnitt 3. Vi återkommer till dessa exempel i slutet av det här avsnittet.

Låt  $X_k$  vara delmängden av  $X$  bestående av de färgningar som har exakt  $k$  ettor. För ett givet gruppelement  $g$ , låt  $\text{fix}_k(g)$  vara antalet färgningar i  $X_k$  som fixeras av  $g$ . Burnsidess lemma ger att antalet banor i  $X_k$  är lika med

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{fix}_k(g).$$

Definiera

$$\text{fix}(g, t) = \sum_{k=0}^n \text{fix}_k(g) t^k.$$

Vi ser att

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{fix}(g, t) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{k=0}^n \text{fix}_k(g) t^k = \sum_{k=0}^n t^k \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{fix}_k(g).$$

Detta innebär att koefficienten framför  $t^k$  i denna summa är lika med antalet banor av färgningar med exakt  $k$  ettor.

Låt oss nu studera polynomet  $\text{fix}(g, t)$  närmare i fallet då  $X$  är mängden av alla möjliga 2-färgningar, alltså mängden av alla funktioner från  $V$  till  $\{0, 1\}$ . Anta att  $g$  har cykelstrukturen  $1^{e_1} 2^{e_2} \dots n^{e_n}$ . Inför variabler  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , och definiera  $g$ 's *cykelindex* att vara polynomet

$$z(g; s_1, s_2, \dots, s_n) = s_1^{e_1} s_2^{e_2} \dots s_n^{e_n}.$$

En färgning fixeras av  $g$  om och endast om varje cykel är enfärgad. Detta innebär att varje cykel av längd  $i$  innehåller antingen 0 hörn eller  $i$  hörn med färgen 1. Multiplikationsprincipen (se häftet för del I av kursen) ger att

$$\text{fix}(g, t) = z(g; 1 + t, 1 + t^2, \dots, 1 + t^n).$$

Vi ersätter alltså  $s_i$  med polynomet  $1 + t^i$  i formeln för  $z(g; s_1, s_2, \dots, s_n)$ . Koefficienten framför  $t^k$  blir då nämligen lika med antalet sätt att få ihop exakt  $k$  element genom att välja antingen inga eller alla element från varje cykel i  $g$ .

Definiera

$$Z(G; s_1, s_2, \dots, s_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} z(g; s_1, s_2, \dots, s_n).$$

Detta är  $G$ 's *cykelindex*.

**Sats 5.1 (Cykelindexsatsen)** Låt  $a_k$  vara antalet banor av färgningar med exakt  $k$  färger. Då är

$$\sum_{k=0}^n a_k t^k = Z(G; 1+t, 1+t^2, \dots, 1+t^n).$$

Detta följer från Burnsidess lemma, ty enligt ovan är

$$\begin{aligned} Z(G; 1+t, 1+t^2, \dots, 1+t^n) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} z(g; 1+t, 1+t^2, \dots, 1+t^n) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{fix}(g, t). \end{aligned}$$

Låt oss studera exemplen från avsnitt 3.

**Exempel 1.** Vi studerar först exemplet från avsnitt 3 med binära följder av längd  $n$ . Som vi konstaterade i avsnitt 3 består  $g^r$  av  $d$  cykler innehållande vardera  $n/d$  element, där  $d = \gcd(n, r)$ . Detta innebär att

$$z(g; s_1, \dots, s_n) = s_{n/d}^d$$

och därmed att

$$Z(C_n; s_1, \dots, s_n) = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} s_{n/\gcd(n,r)}^{\gcd(n,r)}.$$

Låt  $a_k$  vara antalet banor av binära följder med exakt  $k$  ettor. Cykelindexsatsen ger att

$$\sum_{k=0}^n a_k t^k = Z(C_n; 1+t, \dots, 1+t^n) = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} (1+t^{n/\gcd(n,r)})^{\gcd(n,r)}.$$

Exempelvis får vi för  $n = 6$  att

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^6 a_k t^k &= \frac{1}{6} \sum_{r=0}^5 (1+t^{6/\gcd(6,r)})^{\gcd(6,r)} \\ &= \frac{1}{6} ((1+t)^6 + (1+t^2)^3 + 2(1+t^3)^2 + 2(1+t^6)) \\ &= \frac{1}{6} (6 + 6t + 18t^2 + 24t^3 + 18t^4 + 6t^5 + 6t^6) \\ &= 1 + t + 3t^2 + 4t^3 + 3t^4 + t^5 + t^6. \end{aligned}$$

Ur detta kan vi direkt läsa av antalet banor av binära följder med  $k$  ettor för varje  $k$ .

**Exempel 2.** Vi studerar nu exemplet med färgningar av hörnen i kuben från avsnitt 3. Vi låter  $r = 2$  och nöjer oss alltså med att undersöka 2-färgningar. Låt  $G$  beteckna rotationsgruppen. Enligt våra uträkningar i avsnitt 3 har vi att

$$Z(G; s_1, s_2, \dots, s_n) = \frac{1}{24} (s_1^8 + 9s_2^4 + 6s_4^2 + 8s_3^2 s_1^2).$$

Detta ger att

$$\begin{aligned} & Z(G; 1+t, 1+t^2, \dots, 1+t^n) \\ &= \frac{1}{24} (1 \cdot (1+t)^8 + 9 \cdot (1+t^2)^4 + 6 \cdot (1+t^4)^2 + 8 \cdot (1+t^3)^2 (1+t)^2) \\ &= 1 + t + 3t^2 + 3t^3 + 7t^4 + 3t^5 + 3t^6 + t^7 + t^8. \end{aligned}$$

Cykelindexsatsen ger att antalet färgningar med exakt  $k$  ettor är lika med koefficienten framför  $t^k$ . Notera att summan av koefficienterna är 23, vilket var det svar vi fick i avsnitt 3.

## Ö Övningsuppgifter

### Ö.1 Cykliska binära följder, del 1

Låt  $n \geq 1$ , och betrakta två binära följder av längd  $n$  som ekvivalenta om den ena kan erhållas från den andra via en rotation; se Exempel 1 i avsnitt 3. Beräkna antalet banor (ekvivalensklasser) av följder med exakt  $k$  ettor i följande fall:

- (a)  $(n, k) = (8, 4)$ .
- (b)  $(n, k) = (9, 6)$ .
- (c) Godtyckligt par  $(n, k)$  sådant  $1 \leq k < n$  och  $\gcd(n, k) = 1$ .

*Svårighetsgrad: D*

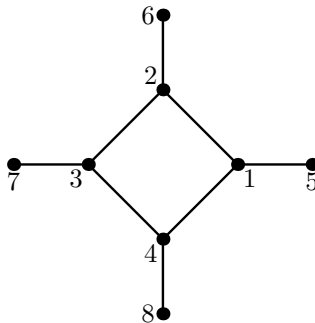
### Ö.2 Par av hörn i en kvadrat med fyra löv

Den dihedrala gruppen  $D_4$  verkar på grafen  $H$  i Figur Ö.2 genom rotation och spegling. Låt  $X$  vara mängden av 2-färgningar av  $H$  som uppfyller följande villkor:

- Exakt två hörn har färgen 1, och dessa två hörn är inte sammanbundna.

(Detta innebär att de två hörnen med färgen 1 utgör en oberoende mängd; se övningsuppgift 20 i häftet till del III.) Beräkna antalet banor av tillåtna färgningar.

*Svårighetsgrad: C*



Figur 2: Grafen  $H$  i uppgift Ö.2.

### Ö.3 Kantfärgningar av kuben, del 1

I avsnitt 2 beskrev vi hur rotationer av kuben ger upphov till grupper av permutationer dels av kubens åtta hörn och dels av kubens sex sidor. I denna uppgift betraktar vi motsvarande grupp av permutationer av kubens tolv kanter.

- (a) Ange cykelstrukturen för de 24 gruppelementen med avseende på hur de verkar på de tolv kanterna.
- (b) Två färgningar av kanterna är ekvivalenta om den ena färgningen kan överföras i den andra via en rotation av kuben. För  $r \geq 1$ , använd Burnside's lemma för att beräkna antalet banor av färgningar av kanterna med färgerna  $\{1, \dots, r\}$ . Vad blir antalet för  $r = 2$ ? Vi har inga restriktioner angående färgningen av intilliggande kanter.

*Svårighetsgrad: B*

### Ö.4 Omärkta färgningar av en hexagon

Beräkna det omärkta kromatiska polynomet för hexagonen  $C_6$ . Du får använda formeln i uppgift 16 i häfte III utan bevis.

*Svårighetsgrad: C*

### Ö.5 Samband mellan färgningar och urvalsproblem

Visa att vi har bijektioner mellan följande par:

- (a) – Märkta  $r$ -färgningar av den kompletta grafen  $K_n$ .  
– Följder av längd  $n$  utan upprepning med element från en mängd med  $r$  element.
- (b) – Omärkta  $r$ -färgningar av den kompletta grafen  $K_n$ .  
– Delmängder av storlek  $n$  till en mängd med  $r$  element.
- (c) – Märkta  $r$ -färgningar av den tomma grafen  $O_n$ .  
– Följder av längd  $n$  med element från en mängd med  $r$  element (upprepning är tillåten).
- (d) – Omärkta  $r$ -färgningar av den tomma grafen  $O_n$ .  
– Multimängder av storlek  $n$  över en mängd med  $r$  element.

(Se avsnitt 1 i häfte I för detaljer om de fyra olika typerna av följder.)

*Svårighetsgrad: D*

### Ö.6 Omärkta färgningar av tomma grafer

Använd (d) i uppgift Ö.5 för att visa att

$$\frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} r^{\gamma(\pi)} = \binom{n+r-1}{n},$$

där  $\gamma(\pi)$  är lika med antalet cykler i cykeluppdelningen för  $\pi$ . (Koefficienterna i polynomet  $\sum_{\pi \in S_n} r^{\gamma(\pi)}$  är absolutbeloppen av Stirlingtalen av första slaget.)

*Svårighetsgrad: D*



## Ö.7 Omärkta färgningar av närapå kompletta grafer

Beräkna det omärkta kromatiska polynomet för  $K_n - e$ , där  $e$  är en godtycklig kant i  $K_n$ . *Ledning.* Automorfgruppen för  $K_n - e$  kan identifieras med mängden av par  $(\sigma, \pi)$  sådana att  $\sigma$  är en permutation av hörnen i  $e$  och  $\pi$  en permutation av hörnen utanför  $e$ .

*Svårighetsgrad:* B

## Ö.8 Cykliska binära följder, del 2

Använd samma beteckningar som i uppgift Ö.1 och Exempel 1 i avsnitt 5. För  $0 \leq k \leq n$ , beräkna antalet banor av följder med exakt  $k$  ettor i följande fall:

- (a)  $n = 8$ .
- (b)  $n = 9$ .
- (c)  $n$  godtyckligt primtal.

*Svårighetsgrad:* C

## Ö.9 Kantfärgningar av kuben, del 2

Använd samma beteckningar som i uppgift Ö.3. För  $0 \leq k \leq 12$ , beräkna antalet ekvivalensklasser av 2-färgningar av de tolv kanterna i kuben sådana att exakt  $k$  kanter får färgen 1.

*Svårighetsgrad:* B

## Ö.10 Matriser under gruppverkan, del 1

Betrakta två  $m \times n$ -matriser  $A$  och  $B$  som ekvivalenta om man kan erhålla  $B$  från  $A$  genom att kasta om ordningen på raderna och på kolonnerna. Observera att vi kan identifiera en binär  $m \times n$ -matris med en färgning av mängden  $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ ; se avsnitt 2.

- (a) Använd en direkt metod för att beräkna antalet ekvivalensklasser av binära  $2 \times 3$ -matriser med  $k$  ettor för  $0 \leq k \leq 6$ .
- (b) Ange en gruppverkan vars banor svarar mot ekvivalensklasserna.
- (c) Lös uppgift (a) med hjälp av cykelindexsatsen.

*Svårighetsgrad:* (a): E, (b): B, (c): B

## Ö.11 Matriser under gruppverkan, del 2

Betrakta nu två  $m \times n$ -matriser  $A$  och  $B$  som ekvivalenta om man kan erhålla  $B$  från  $A$  genom att rotera raderna och kolonnerna cykliskt.

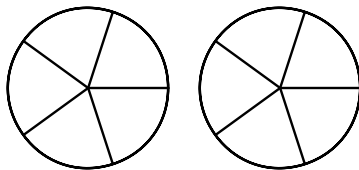
- (a) Ange en gruppverkan vars banor svarar mot ekvivalensklasserna.
- (b) Beräkna antalet banor av binära  $3 \times 4$ -matriser med  $k$  ettor för  $0 \leq k \leq 12$ .

*Svårighetsgrad:* B

## Ö.12 Två cirkelskivor indelade i fem tårtbitar

Två cirkelskivor är indelade i fem identiska tårtbitar som i Figur 3. Vi kan rotera var och en av cirkelskivorna med heltalsmultiplar av  $360/5$  grader, och vi kan kombinera varje tänkbar rotation med att byta plats på de två skivorna. Detta ger en verkan på de två cirkelskivorna med en grupp  $G$  av storlek  $2 \cdot 2^5 = 50$ . För  $0 \leq k \leq 10$ , beräkna antalet ekvivalensklasser av mängder med  $k$  tårtbitar, där två mängder  $A$  och  $B$  betraktas som ekvivalenta om det finns ett gruppelement som avbildar  $A$  på  $B$ .

*Svårighetsgrad: A*



Figur 3: Två cirkelskivor indelade i fem identiska tårtbitar.