F5: Induktion, gränsvärden, kontinuitet

16 september 2008

Talföljder och rekursion

TALFÖLJDER: En *talföljd* är en följd av tal $a_0, a_1, a_2, \ldots$, där vi bryr oss om talens ordning. Talföljden måste inte börja med index 0; t ex är $b_1, b_2, b_3, \ldots$ också en talföljd.

REKURSIVA TALFÖLJDER: Talen i en talföjd kan beskrivas på många sätt. Ett bra sätt är att göra en *rekursiv* definition, där

$$a_n = F(a_{n-1}), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

och $F(x)$ är ett givet uttryck. Utöver funktionen $F(x)$ behöver vi också den första punkten a_0 för att känna hela talföljden.

EXEMPEL: $a_0 = \frac{1}{2}$ och

$$a_n = \frac{2}{1 + a_{n-1}}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

definierar en rekursiv talföld. Beräkna de första talen a_1, a_2, a_3.

Induktion

INDUKTIONSPRINCIPEN: Antag att vi har en egenskap $P(n)$, som principiellt kan vara sann eller falsk för ett givet $n = 0, 1, 2, \ldots$. Antag att:

1. $P(0)$ är sann.

2. Om vi vet att $P(k)$ är sann, så gäller att även $P(k+1)$ är sann.

I så fall gäller $P(n)$ för alla $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

EN TOLKNING. Vi tänker att vi har en stege där varje steg kan bära eller brista. Antag att det första steget bär. Antag dessutom att vi vet att om ett steg bär, så bär även nästföljande steg. I så fall bär hela stegen!

Exempelproblem

PROBLEM 1: Visa att om $a_0 = 1$ samt $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$, så gäller att $a_n \leq 2$ för alla $n = 0, 1, 2, \ldots$.

PROBLEM 2: Visa att

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

gäller för alla positiva heltal n.

Gränsvärden

Vi behöver definiera det intuitiva gränsvärdesbegreppet noggrant.

GRÄNSVÄRDE DÅ $x \to +\infty$: Vi säger att

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A,$$

eller annorlunda skrivet

$$f(x) \to A \quad \text{då} \quad x \to +\infty,$$

om:
för varje $\varepsilon > 0$ finns $\omega = \omega(\varepsilon)$ ändligt så att

$$x > \omega \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Talet A sägs vara funktionens (eller uttryckets) *gränsvärde*.

TOLKNING. För tillräckligt stora ω gäller att $f(x)$ är ε-nära talet A förutsatt att x ligger på intervallet $]\omega, +\infty[$.

Exempelproblem

PROBLEM 3: Visa att

$$\frac{x+1}{x} \to 1 \quad \text{då} \quad x \to +\infty.$$

PROBLEM 4: Visa att funktionen $f(x) = \sin x$ saknar gränsvärde då $x \to +\infty$.

Ytterligare gränsvärden

GRÄNSVÄRDE Då $x \to -\infty$: Man definierar gränsvärdet då $x \to -\infty$ analogt. Alternativt kan vi skriva att

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(-x).$$

GRÄNSVÄRDE Då $x \to a$: Om a är ett ändligt tal behöver vi kunna prata om

$$\lim_{x \to a} f(x), \quad \lim_{x \to a^+} f(x), \quad \lim_{x \to a^-} f(x).$$

Till exempel säger vi att

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

om:
för varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ så att

$$|x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

OEGENTLIGT GRÄNSVÄRDE. Vi vill t ex kunna uttrycka att

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

vilket ska betyda att $f(x)$ blir hur stor som helst då x blir hur stor som helst. Formellt blir det:
för varje (stort) tal β finns ett (ändligt) tal $\omega = \omega(\beta)$ så att

$$x > \omega \quad \Longrightarrow \quad f(x) > \beta.$$

Vi vill även kunna prata om det oegentliga gränsvärdet $-\infty$, samt att vi får oegentliga gränsvärden även då $x \to a$, $x \to a^+$, och då $x \to a^-$.

Räkneregler för gränsvärden

Nedanstående gäller oavsett om det handlar om gränsvärde då x går mot oändligheten eller mot en ändlig punkt.

SATS 1: Om $\lim f(x) = 0$ och $g(x)$ är begränsad, så gäller att $\lim f(x)g(x) = 0$.

SATS 2 Om $\lim f(x) = A$ och $\lim g(x) = B$, så har vi att

$$\lim f(x) + g(x) = A + B,$$

samt

$$\lim f(x)g(x) = AB.$$

Om därtill $B \neq 0$ så gäller

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Räkneregler för gränsvärden II

SATS 3 (sammansättningsregeln): Om $\lim g(x) = a$ och om

$$f(t) \to A \quad \text{då} \quad t \to a,$$

så är

$$\lim f(g(x)) = A.$$

Här kan A och a vara ändliga såväl som $+\infty$ eller $-\infty$.

SATS 4 Om $\lim f(x) = A$ och $\lim g(x) = A$, och om

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x),$$

så gäller att $\lim h(x) = A$.

SATS 5 Om $f(x) \leq g(x)$ så är $\lim f(x) \leq \lim g(x)$, om båda gränsvärdena finns.

Exempelproblem för gränsvärden

PROBLEM 5: Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + \cos x}{2 + x^3}.$$

PROBLEM 6: Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cos x + \sin x}{x + x^2}.$$

PROBLEM 7: Beräkna

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} - x \right).$$

PROBLEM 8: Beräkna

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}.$$

Kontinuerliga funktioner

DEFINITION: En funktion $f(x)$ är kontinuerlig i en punkt x_0 om $f(x_0)$ finns och

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

DEFINITION: En funktion $f(x)$ är kontinuerlig på ett intervall I om funktionen är kontinuerlig i varje punkt på intervallet.

EXEMPEL: Funktionen $f(x) = x \sin(1/x)$ för $x \neq 0$ blir kontinuerlig i $x = 0$ och därmed på hela linjen om vi sätter $f(0) = 0$.

Satser om kontinuerliga funktioner

SATS 6: Om en funktion $f(x)$ är kontinuerlig i ett intervall $[a, b]$ och om $f(a) \neq f(b)$ så antar $f(x)$ varje värde mellan $f(a)$ och $f(b)$ på intervallet.

SATS 7: Om en funktion $f(x)$ är kontinuerlig i ett intervall $[a, b]$ så antar $f(x)$ sitt max och min på intervallet.

Exponentialfunktionen

Vi betraktar uttrycket

$$E_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{1/n},$$

där n är ett positivt heltal (som vi kan anta vara större än x om vi vill). Man kan visa att gränsvärdet

$$E(x) = \lim_{n \to +\infty} E_n(x)$$

finns. Dessutom gäller att

$$E(x) = \lim_{n \to -\infty} E_n(x).$$

Vi inför talet e:

$$e = E(1) = \lim_{n \to +\infty} E_n(1) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/n}.$$

Exponentialfunktionen II

SATS 8: Vi har att för heltal p, q, $q \neq 0$:

$$E(px/q) = E(x)^{p/q}.$$

Speciellt alltså

$$E(p/q) = E(1)^{p/q} = e^{p/q}.$$

DEFINITION: Vi skriver $e^x = E(x)$.