

SF 1625 Envariabelanalys för M1
Kontrollskrivning 0
måndagen den 26 oktober 2009 klo 13.15

Inga hjälpmedel är tillåtna. Förklara allt Du gör. Svaren måste motiveras.

1. Givet sambandet $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Bestäm ett så stort intervall som möjligt där denna funktion är inverterbar. Beräkna sedan inversen (den inversa funktionen).

2. Om man utvecklar uttrycket $(x+y)^5$ så får man sex olika termer. Hur ser dessa sex termer ut i fallet då $x = 2$, $y = 1$, och vad blir deras summa?

3. Givet olikheterna $\ln(1+x) < f(x) < 3 \ln(1+3x)$ för alla positiva reella x .
Vad kan sägas om $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ och vad kan sägas om $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$?

4. Vad händer med uttrycket $\pi x \cot \pi x$, då x går mot noll?

5. För vilka x konvergerar $\sum_{n=1}^{\infty} (2x)^n$? Beräkna summan.

6. Beräkna gränsvärdet av produkten $x \cdot \ln x$, då x går mot noll genom positiva värden. Tips: Prova någon av substitutionerna $\ln x = u$ eller $\ln x = -t$.

7. Av följande fem uttryck är fyra parvis lika två och två. Avgör vilka som är lika och visa det. Beräkna även det femte uttrycket.
 $y = \cosh 2x$, $z = \sinh 2x$,
 $v = 2 \cosh x \sinh x$, $u = \cosh^2 x - \sinh^2 x$, $w = \cosh^2 x + \sinh^2 x$.

8. En regelbunden n -hörning (polygon med n lika långa sidor eller kanter) skrivs in i enhetscirkeln. Låt var och en av dessa kanter ha längd L_n .

Vad kan man säga om L_n , då $n \rightarrow \infty$?

Kan man säga något om $n L_n$, då $n \rightarrow \infty$?

Kan man säga något om $n^2 L_n$, då $n \rightarrow \infty$?

9. Betrakta följande två påståenden:

(E) För alla reella x gäller att $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \rightarrow e^x$, då $n \rightarrow \infty$.

(L) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$.

Om man vet att (E) gäller, medför detta att även (L) gäller?

SVAR:

1. Antingen kan man välja intervallet $0 \leq x < 1$, där inversen lyder (lös ut x)

$x = \sqrt{1 - \frac{1}{y^2}}$, eller så väljer man intervallet $-1 < x \leq 0$, där inversen ges av

$$x = -\sqrt{1 - \frac{1}{y^2}}.$$

2. $243 = 32 + 80 + 80 + 40 + 10 + 1$.

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ och $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \pi x \cot \pi x = 1$.

5. Summan konvergerar precis då utvecklingsparametern $2x$ är mindre än ett till sitt belopp, $|2x| < 1$, dvs $-1/2 < x < 1/2$. Summan blir då $\frac{2x}{1 - 2x}$.

6. Gränsvärdet är noll.

7. $y = w$, $z = v$, $u = 1$.

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} nL_n = \pi$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 L_n = \infty$.

9. Logaritmera formlerna uti (E) och substituera sedan $t = x/n$ överallt. Då får man formel (L). Svaret på frågan är alltså ja.