Lektion 4
Fourierserier på andra intervall 4.5-4.6
Gibbs fenomenet 4.7

November 2, 2009

Annan period än 2π

p-periodiska

Låt $0 < p \neq 2\pi$ och antag f är $2p$-periodisk:

$$f(s+2p) = f(s) \qquad \text{för alla } s \in R.$$

Definiera

$$g(s) = f(\frac{p}{\pi}s) \qquad s \in R.$$

Då är g en 2π-periodisk funktion:

$$g(\underbrace{t+2\pi}_{s}) = f\left(\frac{p}{\pi}(\underbrace{t+2\pi}_{s})\right) = f\left(\frac{p}{\pi}t + 2p\right) = f\left(\frac{p}{\pi}t\right) = g(t).$$

Annan period än 2π

p-periodiska

Eftersom g är en 2π-periodisk funktion får vi

$$g(t) \sim \sum c_n e^{int}$$

med

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-int} dt.$$

För att gå tillbaka till f, sätt

$$t = \frac{\pi}{p} s \qquad s = \frac{p}{\pi} t.$$

Annan period än 2π

p-periodiska

Då är $g(t) = \{\text{enligt definition}\} = f(\frac{p}{\pi}t) = f(s)$. Alltså vi har

$$f(s) = g(t) \sim \sum c_n e^{int} = \{t = \frac{\pi}{p}s\} =$$

$$\sum c_n e^{in\overbrace{(\pi/p)}^{\Omega}s} = \sum c_n e^{in\Omega s},$$

$\Omega = \pi/p$.

Annan period än 2π

Koefficienterna för p-periodiska

Koefficienterna bestäms genom

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{p}{\pi} t\right) e^{-int} dt = \frac{1}{2p} \int_{-p}^{p} f(s) e^{-in\Omega s} ds$$

På samma sätt fås att

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t)$$

Annan period än 2π

Koefficienterna för p-periodiska

med

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\cos(n\Omega t)dt$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\sin(n\Omega t)dt$$

Annan period än 2π

Exempel 1

Bestäm F-serien för den jämna 2-periodiska funktionen som ges av $f(t) = t$ då $0 \leq t \leq 1$, d.v.s.

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ -t, & -1 \leq t \leq 0 \end{cases}$$

eller $f(t) = |t|$ då $|t| \leq 1$.

Annan period än 2π

Lösning av Exempel 1

Eftersom funktionen är jämn kommer Fourierserien enbart bestå av cosinustermer. Vi har $p = 1$ och $\Omega = \pi$.

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(t) \cos(n\pi t) dt = 2 \int_{0}^{1} t \cos(n\pi t) dt.$$

För $n = 0$:

$$a_0 = 2 \int_{0}^{1} t dt = 1.$$

Annan period än 2π

Lösning av Exempel 1: Fortsättning

För $n > 0$

$$2\int_0^1 t\cos(n\pi t)dt = 2\underbrace{\left[\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi t)t\right]_0^1}_{=0} - 2\int_0^1 \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi t)dt$$

$$= -2\left[-\frac{1}{(n\pi)^2}\cos(n\pi t)\right]_0^1 = \frac{2}{(n\pi)^2}(\cos(n\pi) - 1)$$

$$= \left\{\cos(n\pi) = \left\{\begin{array}{cc} 1 & n \text{ jämnt} \\ -1 & n \text{ udda} \end{array}\right.\right\} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & n \text{ jämnt} \\ -\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2} & n \text{ udda} \end{array}\right.$$

Annan period än 2π

Lösning av Exempel 1: Fortsättning

Totalt får vi

$$f \sim \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^2\pi^2} \cos((2n-1)\pi t).$$

Annan period än 2π

övning 4.25 (Vretblad)

Bestäm en lösning med period 2 till differentialekvationen

$$y'(t) + y(t-1) = \cos^2(\pi t).$$

Fler exempel finns på sid. 91-93 i Vretblad.

Annan period än 2π

Lösning till övning 4.25

Vi gör ansatsen

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t}.$$

Sedan tidigare vet vi att F-seriens period $2p$ och Ω hänger ihop genom $\Omega = \pi/p$. Vi ska alltså välja $p = 1$ och får således $\Omega = \pi$.

Annan period än 2π

Lösning till övning 4.25

Vi har

$$y'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (in\pi) e^{in\pi t}$$

och

$$y(t-1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi(t-1)}.$$

Dessutom, med Eulers formel:

$$\cos^2(\pi t) = \left(\frac{e^{i\pi t} + e^{-i\pi t}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2i\pi t} + e^{-2i\pi t} + 2\right).$$

Annan period än 2π

Lösning till övning 4.25

I diff.ekv. blir detta:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(in\pi)e^{in\pi t} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi(t-1)}$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{2i\pi t} + e^{-2i\pi t} + 2\right).$$

P.g.a. Fourierseriens entydighet måste koefficienterna framför lika potenser av $e^{i\pi t}$ vara lika i H.L och V.L.

Annan period än 2π

Lösning till övning 4.25

Vi identifierar koefficienterna:

$$c_0 = \frac{1}{2},$$

$$c_2(i2\pi)e^{2in\pi t} + c_2 e^{-2i\pi} e^{2i\pi t} = \frac{1}{4}e^{2i\pi t} \iff$$

$$c_2(\underbrace{e^{-2i\pi}}_{=1} + 2i\pi) = \frac{1}{4} \iff$$

$$c_2 = \frac{1}{4}\frac{1}{1+2i\pi} = \frac{1-2i\pi}{4(1+(2\pi)^2)}.$$

Annan period än 2π

Lösning till övning 4.25

P.s.s.

$$\frac{1}{4} = c_{-2}(-2i\pi) + c_{-2}e^{2i\pi} \iff c_{-2} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-2i\pi} = \frac{1+2i\pi}{4(1+(2\pi)^2)}.$$

övriga koefficienter måste vara noll, igen på grund av F-seriens entydighet.

Annan period än 2π

Lösning till övning 4.25

Vi får

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4(1+(2\pi)^2)}\left((1+2i\pi)e^{-2i\pi t} + (1-2i\pi)e^{2i\pi t}\right)$$

Eulers formel ger

$$e^{2i\pi t} + e^{-2i\pi t} = 2\cos(2\pi t)$$

och

$$-2i\pi(e^{2i\pi t} - e^{-2i\pi t}) = \frac{4\pi}{2i}(e^{2i\pi t} - e^{-2i\pi t}) = 4\pi\sin(2\pi t).$$

Annan period än 2π

Lösning till övning 4.25

Detta ger

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4(1+(2\pi)^2)}(2\cos(2\pi t) + 4\pi\sin(2\pi t)).$$

Gibbs fenomen

funktion med hoppdiskontinuitet

Gibbs fenomen Beskriver F-serie av funktion med hoppdiskontinuitet. Läs själva om detaljerna i kurslitteraturen.

Gibbs fenomen

Exempel på Gibbs fenomen

Definiera en 2π-periodisk funktion f genom

$$f(t) = 1 \qquad 0 < t < \pi$$

$$f(t) = -1, \qquad -\pi < t < 0.$$

$$f \quad \text{udda} \quad \Rightarrow \quad a_n = 0 \quad \forall\ n\ .$$

Vi får

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(nt)dt = \frac{2}{n\pi}(1 - (-1)^n),$$

Gibbs fenomen

Exempel på Gibbs fenomen

Alltså

$$
\begin{aligned}
b_{2k+1} &= \frac{4}{(2k+1)\pi} \\
b_{2k} &= 0 \quad \text{för } k = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

och vi får

$$
F(t) = \{\text{F-serien för}(f)\} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)t)}{2k+1}.
$$

Observera att $F(0) = 0$, men $f(0)$ är odefinierad!

Gibbs fenomen

Exempel på Gibbs fenomen

Är $F(t) = f(t)$, då $t \neq 0$, i detta exempel?

För att svara på denna fråga studerar vi delsummorna

$$s_n = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin((2k+1)t)}{2k+1} =$$

$$\sin t + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \cdots + \frac{\sin((2n+1)t)}{2n+1}$$

Gibbs fenomen

Exempel på Gibbs fenomen

Således får vi

$$s_n'(t) = \cos t + \cos(3t) + \cos(5t) + \cdots + \cos((2n+1)t)$$

$$\{\text{enl. boken, sid 94}\} = \frac{\sin(2(n+1)t)}{2\sin t}, \qquad t \neq 0.$$

Gibbs fenomen

Exempel på Gibbs fenomen

Den nya definitionen av $s_n'(t)$ gör att den blir odefinierad i nollan men,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(2(n+1)t)}{2\sin t} = n+1 \quad \text{(tänk på L'Hospitals regel)}$$

Observera även

$$s_n'(t) = 0 \iff t = \frac{k\pi}{2(n+1)} =: \tau_k, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Gibbs fenomen

Exempel på Gibbs fenomen

Möjliga maxpunkter till s_n hittas således i punkterna τ_k.

Eftersom sinusfunktione växande i $(0, \pi/2)$ så borde

$$s_n(t) = \int_0^t s_n'(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{\sin(2(n+1)\tau)}{2\sin\tau} d\tau$$

anta sitt max i τ_1, d.v.s. $s_n(\tau_1) = \max s_n$.

Gibbs fenomen

Exempel på Gibbs fenomen

Man kan visa att $s_n(t)$ är begränsad (m.a.p. n), så det finns $s(t)$ så att $s_n(t) \to s(t)$ i $(0, \pi/2)$.

P.g.a. symmetri kommer $s_n(t)$ konvergera även för $t < 0$.

Konvergensen är likformig i kompakta mängder av $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$, och

$$s_n(t) \to 1 \qquad \text{om} \qquad t \neq 0.$$

Gibbs fenomen

Allmänt

Låt nu g vara funktion med diskontinuitet i t_0 men deriverbar f.ö. Sätt $\delta = g(t_0^+) - g(t_0^-)$. Här

$$g(t_0^+) = \lim_{t \searrow t_0} g(t), \quad g(t_0^-) = \lim_{t \nearrow t_0} g(t)$$

Definiera

$$h(t) = g(t) - \frac{1}{2}\delta \cdot f(t - t_0),$$

med f squarewave funktionen ovan:

$$f(t) = 1 \qquad 0 < t < \pi \qquad f(t) = -1, \qquad -\pi < t < 0.$$

Gibbs fenomen

Allmänt

Man kan visa att h kontinuerlig i t_0 (VISA DETTA!).
Vidare existerar $h'_L(t_0)$, $h'_R(t_0)$:

$$\left(g'_L(t_0) = \lim_{h \nearrow 0} \frac{g(t_0+h) - g(t_0^-)}{h}\right), \quad \text{osv}\ldots$$

Under dessa förutsättningar har h en Fourierserie som konvergerar mot h.

Alltså

$$F(g) = F(h) + F(f(t-t_0))$$

Exempel

övning 4.46

Bestäm F-serien tillhörande

$$f(x) = x^3 - \pi^2 x, \quad -\pi < x < \pi \quad f(x+2\pi) = f(x).$$

samt värdet för summaserien

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} \ .$$

Exempel

Lösning.

f udda $\Rightarrow a_n = 0$, och

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^3 - \pi^2 x)\sin nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\underbrace{\left[\frac{-\cos nx}{n}(x^3-\pi^2 x)\right]_0^{\pi}}_{=0} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nx(3x^2-\pi^2)dx$$

$$= \frac{2\cdot 3}{n\pi}\underbrace{\int_0^{\pi}\cos nx\cdot x^2 dx}_{(2/n^2)\pi(-1)^n} - \frac{2\pi^2}{n\pi}\underbrace{\int_0^{\pi}\cos nx dx}_{=0} = \frac{12}{n^3}(-1)^n.$$

Detta ger

$$x^3 - \pi^2 x = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx.$$

$x = \pi/2 \Rightarrow \sin(n\pi/2) = 0$ om n jämn.

För udda n, skriv $n = 2m - 1,\ m = 1, 2, \ldots$.

$$\sin\left((2m-1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1, & m \text{ udda} \\ -1, & m \text{ jämnt} \end{cases} = (-1)^{m+1}.$$

Vi får:

$$\underbrace{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - \pi^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{-3\pi^3/8} =$$

$$12\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2m-1}}{(2m-1)^3}(-1)^{m+1} = 12\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3m}}{(2m-1)^3} =$$

$$12\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m}}{(2m-1)^3} = -\frac{3}{8}\pi^3 \quad \text{enl. enligt räkningen ovan}$$

Multiplicera ekvationen med -1 och dela med 12 för att få

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{3}{96}\pi^3.$$