

Matematiska Institutionen, KTH

Tentamensskrivning i Linjär algebra komplettering, SF1605, den 5 juni 2010, kl 09.00-14.00.

Examinator: Olof Heden.

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 15p.)

5	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
6	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
8	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
10	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
12	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
14	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Generellt gäller att för full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

Problem:

- (3p) Betrakta vektorrummet R^5 . Visa att vektorerna $\bar{a}_1 = (1, 1, 2, 1, 0)$, $\bar{a}_2 = (0, 1, 1, 2, -1)$ och $\bar{a}_3 = (1, 0, 2, -1, 1)$ är linjärt oberoende samt bestäm sedan vektorer $\bar{a}_4$ och $\bar{a}_5$ så att de tillsammans med de tre givna vektorerna bildar en bas för R^5 .
- (3p) Bestäm samtliga reella tal a, b, c, d och e som gör nedanstående matris till en ortogonalmatris:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & a \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & b \\ c & d & e \end{pmatrix}$$

- (3p) Visa med hjälp av ett induktionsbevis att talen i talföljden $a_n = 4^n + 2(-2)^n$ för $n = 0, 1, 2, \dots$, satisfierar rekursionsekvationen

$$a_n = 2a_{n-1} + 8a_{n-2} \quad n = 2, 3, \dots,$$

med $a_0 = 3$ och $a_1 = 0$.

- Matriserna i denna uppgift är samtliga kvadratiske $n \times n$ -matriser.
 - (2p) Visa att om matrisen $\mathbf{B}$ har full rang, dvs rangen för matrisen $\mathbf{B}$ är n , så gäller för varje annan matris $\mathbf{A}$ att matriserna $\mathbf{AB}$ och $\mathbf{BA}$ har samma rang.
 - (1p) Bestäm två 3×3 -matriser $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ sådana att matriserna $\mathbf{AB}$ och $\mathbf{BA}$ har olika rang.
- (3p) Med hjälp av kunskaper från gymnasiets kurser Matematik A, B, C och D samt de verktyg du har fått med dig från kursen i Linjär algebra, skall du bestämma de reella tal a och b som gör värdet av integralen nedan så litet som möjligt:

$$\int_0^1 (t^3 - a - bt)^2 dt.$$