Lösningar till tentamensskrivning i kompletteringskurs Linjär Algebra, SF1605, den 10 januari 2011,kl 14.00-19.00

1. (3p) Visa med hjälp av ett induktionsbevis att

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m(m+1)} = \frac{n}{n+1} \ .$$

Lösning: Formeln är uppenbarligen sann när $n = 1$ eftersom formelns vänstra led då är lika med $1/1(1+1)$ vilket ju är lika med formelns högra led när $n = 1$.

Vi visar nu att implikationen

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m(m+1)} = \frac{n}{n+1} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{m=1}^{n+1} \frac{1}{m(m+1)} = \frac{n+1}{(n+1)+1} \ ,$$

är giltig för alla naturliga tal $n \geq 1$.

Vi finner nu att

$$\sum_{m=1}^{n+1} \frac{1}{m(m+1)} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \ ,$$

och alltså om

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m(m+1)} = \frac{n}{n+1} \ ,$$

så har vi att

$$\sum_{m=1}^{n+1} \frac{1}{m(m+1)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2},$$

Eftersom nu både implikationen, dvs ”induktionssteget”, och ”bassteget” är visade så är formeln sann enligt induktionsprincipen.

2. (3p) Låt $\mathbf{C}$ beteckna matrisen

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 6 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Snittet mellan matrisens kolonnrum och nollrum utgör ett delrum L till R^4. Bestäm en bas för L.

Lösning: Vektorn $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$ tillhör $\mathbf{C}$:s kolonnrum om och endast om

$$\bar{y} = \mathbf{C}\bar{x} \ ,$$

för någon vektor $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ i R^4. Vidar så tillhör $\bar{y}$ matrisen $\mathbf{C}$:s nollrum precis då

$$\mathbf{C}\bar{y} = (0,0,0,0)^T \ .$$

Vi har alltså att undersöka om det finns någon vektor $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ sådan att

$$\mathbf{C}(\mathbf{C}\bar{x}) = (0,0,0,0)^T \ .$$

Matrismultiplikation är en associativ operation och vi kan då börja med att beräkna $\mathbf{C^2}$:

$$\mathbf{CC} = \begin{bmatrix} 22 & 14 & 18 & 12 \\ 34 & 22 & 28 & 18 \\ -10 & -6 & -8 & -6 \\ 46 & 30 & 38 & 24 \end{bmatrix}$$

och löser systemet $\mathbf{C}^2\bar{x} = \bar{0}$:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 22 & 14 & 18 & 12 & 0 \\ 34 & 22 & 28 & 18 & 0 \\ -10 & -6 & -8 & -6 & 0 \\ 46 & 30 & 38 & 24 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ -10 & -6 & -8 & -6 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -10 & -6 & -8 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Lösningen ges alltså av

$$x_1 = t \ , x_3 = s \ , x_2 = -t - s \ , x_4 = \frac{-2}{3}t + \frac{-1}{3}s \ ,$$

där s och t är godtyckliga reella tal.

Vi sökte emellertid vektorerna $\bar{y}$ i kolonnrummet som gavs av $\bar{y} = \mathbf{C}\bar{x}$, och en bas för det delrum som bestod av alla dessa kolonner. Med $(t,s) = (1,0)$ resp $(t,s) = (0,1)$ får vi en sådan bas:

$$\bar{y}_1 = \mathbf{C}(1, -1, 0, -2/3)^T = (0,0,0,0)^T \ ,$$

resp

$$\bar{y}_2 = \mathbf{C}(0, -1, 1, -1/3)^T = (0,0,0,0)^T \ ,$$

och den slutsats vi kan dra är att snittet mellan matrisens nollrum och kolonnrum bara består av nollvektorn.

3. (3p) Betrakta vektorrummet $\mathcal{P}$ vars vektorer är polynomen i variabeln t med koefficienter som är reella tal. Med hjälp av den inre produkten

$$(f(t) \mid g(t)) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{dt}$$

kan vi, på sedvanligt sätt, införa en metrik i $\mathcal{P}$. Låt L vara det delrum till $\mathcal{P}$ som spänns upp av polynomen t och $1 + t^2$. Skriv nu vektorn 1 som en summa av en vektor $\bar{u} \in L$ och en vektor $\bar{v}$ i L:s ortogonala komplement $L^{\perp}$.

Lösning: Polynomet $\bar{u}$ kommer att vara en linjärkombination av t och $1 + t^2$, dvs

$$\bar{u} = at + b(1 + t^2) \ ,$$

så polynomet $\bar{v}$ kommer att vara lika med

$$\bar{v} = 1 - at - b(1+t^2) \ ,$$

och vi observerar att våra beräkningar kommer att avse vektorer i det 3-dimensionella rummet $\mathcal{P}_2$ av polynom av grad högst lika med 2. Ortogonala komplementet $L^\perp$ till L i $\mathcal{P}_2$ kommer att vara 1-dimensionellt. Vi bestämmer först $L^\perp$ (så slipper vi att bestämma en ON-bas för L).

Polynomet $\bar{e} = 1 + ct + dt^2$ tillhör $L^\perp$ precis då

$$(\bar{e} \mid t) = 0 \qquad \text{och} \qquad (\bar{e} \mid 1+t^2) = 0 \ ,$$

eller annorlunda uttryckt

$$\int_{-1}^{1}(1+ct+dt^2)t\mathrm{dt} = 0 \qquad \text{och} \qquad \int_{-1}^{1}(1+ct+dt^2)(1+t^2)\mathrm{dt} = 0 \ .$$

Den första integralen ger att $c = 0$ och det andra integralvillkoret blir då

$$0 = \int_{-1}^{1}(1+dt^2)(1+t^2)\mathrm{dt} = \int_{-1}^{1} 1 + (d+1)t^2 + dt^4\mathrm{dt} = 2 + \frac{2(d+1)}{3} + \frac{2d}{5}$$

varur vi finner att $d = -5/2$. Således

$$L^\perp = \mathrm{span}\{1 - \frac{5}{2}t^2\} \ .$$

Vi projicerar nu vektorn 1 på $L^\perp$:

$$\mathrm{Proj}_{L^\perp}(1) = \frac{(1 \mid (1-5/2t^2))}{((1-5/2t^2) \mid (1-5/2t^2))} \cdot (1 - \frac{5}{2}t^2)$$

som uträknat blir

$$\frac{\int_{-1}^{1} 1 - 5/2t^2\mathrm{dt}}{\int_{-1}^{1}(1-5/2t^2)^2\mathrm{dt}} \cdot (1-\frac{5}{2}t^2) = \frac{1/3}{7/6} \cdot (1-\frac{5}{2}t^2) = \frac{2}{7} \cdot (1-\frac{5}{2}t^2) = \frac{2}{7} - \frac{5}{7}t^2 \ .$$

Svar: $\bar{v} = \frac{2}{7} - \frac{5}{7}t^2$ och $\bar{u} = 1 - \bar{v} = \frac{5}{7} + \frac{5}{7}t^2$.

4. (3p) Låt **A** och **B** beteckna nedanstående matriser

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 4 \\ 5 & 7 & 7 & 7 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$

Undersök om det finns en matris **X** vars rang är 2 och som är sådana att $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$. (**Anm.** Om matrisen **X** skulle finnas behöver den inte bestämmas för att full poäng skall erhållas.)

Lösning: Vi betraktar matriserna **A** och **B** som matriser beskrivande linjära avbildningar A resp B av R^4 på sig själv. Frågan kan då översättas till huruvida det finns en linjär avbildning X sådan att avbildningen $A \circ X$ är avbildningen B och bildrummet till X har dimension 2..

Vi bestämmer först B:s bildrum, vilket är matrisen $\mathbf{B}$:s kolonnrum:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 4 \\ 5 & 7 & 7 & 7 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 10 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim$$

så kolonn ett och två i ursprungsmatrisen är linjärt oberoende och matrisens rang är så B:s bildrum är

$$\mathrm{span}\{(2,5,3,4),(4,7,3,8)\}\ .$$

Vi söker nu att $\mathbf{A}$:s kolonnrum:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

så även mtrisen $\mathbf{A}$ har rang 2 och dess första två kolonner indikerar en bas för A:s bildrum:

$$\mathrm{span}\{(1,3,2,2),(1,1,0,2)\}\ .$$

Vi placerar nu de bägge bildrummens generatorer som rader i en matris, i syfte att visa att bildrummen är lika, och bestämmar rangen för denna matris:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 3 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

så dimensionen av A:s bildrum ökar inte när vi utökar detta delrum med generatorerna för B:s bildrum. Dessa bägge bildrum måste då vara lika eftersom de båda har dimension 2.

Vi påvisar nu existensen av en matris $\mathbf{X}$, genom att beskriva en avbildning X sådan att $B = A \circ X$. Matrisn $\mathbf{X}$ blir då den matris som beskriver avbildningen X (relativt standardbasen).

Eftersom B:s kolonner tillhör A:s bildrum finns det vektorer $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$, $\bar{f}_3$ och $\bar{f}_4$ som A avbildar på B:s kolonner, resp, dvs

$$A\bar{f}_1 = (2,5,3,4)\ , \quad A\bar{f}_2 = (4,7,3,8)\ , \quad A\bar{f}_3 = (5,7,2,10)\ , \quad A\bar{f}_4 = (4,7,3,8)\ .$$

Om vi nu låter X vara en avbildning som avbildar standardbasvektorerna $\bar{e}_1$ på $\bar{f}_1$, $\bar{e}_2$ på $\bar{f}_2$, $\bar{e}_3$ på $\bar{f}_3$ samt $\bar{e}_4$ på $\bar{f}_4$, så kommer sammansättningen $A \circ X$ ha egenskapen att

$$\begin{aligned} (A \circ X)\,\bar{e}_1 &= (2,5,3,4)\ , \\ (A \circ X)\,\bar{e}_2 &= (4,7,3,8)\ , \\ (A \circ X)\,\bar{e}_3 &= (5,7,2,10)\ , \\ (A \circ X)\,\bar{e}_4 &= (4,7,3,8)\ . \end{aligned}$$

Matrisen för avbildningen X ger alltså den eftersökta matrisen under förutsättning att vektorerna $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$, $\bar{f}_3$ och $\bar{f}_4$ kan väljas så att de spänner upp ett delrum av dimension 2.

Men $\bar{f}_1$ och $\bar{f}_2$ kan inte vara parallella eftersom A avbildar dem på två ickeparallella vektorer. Beteckna $\mathbf{B}$:s kolonner $\bar{k}_i$, för $i = 1, 2, 3, 4$. Eftersom B:s kolonnrum spänns upp av $\bar{k}_1$ och $\bar{k}_2$ så gäller det att

$$\bar{k}_3 = a\bar{k}_1 + b\bar{k}_2 \ ,$$

så låter vi $\bar{f}_3 = a\bar{f}_1 + b\bar{f}_2$ har vi att

$$A\bar{f}_3 = A(a\bar{f}_1 + b\bar{f}_2) = a\bar{k}_1 + b\bar{k}_2 = \bar{k}_3 \ ,$$

och på samma sätt hittar vi ett lämpligt $\bar{f}_4$ så att

$$\dim(\mathrm{Span}\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3, \bar{f}_4\}) = 2 \ .$$

Nu äntligen kommer vi ha en matris $\mathbf{X}$ vars rang är lika med 2.

5. (3p) Låt $\mathbf{A}$ vara en $n \times m$-matris och $\mathbf{b}$ en $n \times 1$-matris. Visa att ett och endast ett av nedanstående två system har en lösning:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \ , \tag{1}$$

respektive

$$\mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{0} \ , \ \ \mathbf{y}^T\mathbf{b} \neq 0 \ , \tag{2}$$

där $\mathbf{A}^T$ betecknar den till $\mathbf{A}$ transponerade matrisen. (Du får använda samtliga satser i boken utan att bevisa dom.)

Lösning: Det finns följande två alternativ för vektorn $\mathbf{b}$, antingen så tillhör $\mathbf{b}$ matrisen $\mathbf{A}$:s kolonnrum, eller så gör den inte det. Det första fallet inträffar precis när ekvation (1) är lösbar.

Vi visar nu att $\mathbf{b}$ inte tillhör $\mathbf{A}$:s kolonnrum L precis när ekvation (2) är lösbar. Raderna i $\mathbf{A}^T$ är matrisen $\mathbf{A}$:s kolonner så att $\mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{0}$ det är ekvivalent med att $\mathbf{y}$ tillhör ortogonala komplementet $L^\perp$ till $\mathbf{A}$:s kolonnrum L. Eftersom $(L^\perp)^\perp$ gäller allmänt för alla delrum L till ett vektorrum V har vi nu att för alla $\mathbf{y} \in L^\perp$ så

$$\mathbf{y}^T\mathbf{b} \neq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{b} \notin L \ ,$$

vilket således visar att ekvation (2) är lösbar precis då $\mathbf{b}$ inte tillhör $\mathbf{A}$:s kolonnrum.