

SF1624 för EM och E, ht10 - sammanfattning

- Projektioner och koordinater
 - Givet vektor v och linje L , skriv $v = v_L + v_N$ (komponentuppdelning) där v_L är parallell med L och v_N är vinkelrät mot L .
 - v_L kallas den *ortogonala projektionen av v på L* .
 - Om $W \subset V$ är ett underrum med ON-basen $w_1, \dots, w_n$ ges $P_W : V \rightarrow W$ av $P_W(v) = \langle w_1, v \rangle w_1 + \langle w_2, v \rangle w_2 + \dots + \langle w_n, v \rangle w_n$.
- Skalarprodukt
 - Om u är vektor, e en enhetsvektor som är parallell med linjen L , så är $u_L = (u \cdot e)e$, och $|u_L| = u \cdot e$.
 - Längd av vektor: $|v|^2 = v \cdot v$.
 - $u \cdot v = |u||v|\cos(\alpha)$ där α är vinkeln mellan u, v .
 - $u \cdot v = 0 \Leftrightarrow u$ och v vinkelräta *eller* någon av u, v lika med nollvektorn.
 - Säger att u, v *ortogonala* om $u \cdot v = 0$.
 - Vektorna $v_1, v_2, \dots, v_n$ sägs vara *ortonormala* om $v_i \cdot v_j = 0$ om $i \neq j$, och $v_i \cdot v_i = 1$. OBS: ortonormala vektorer är automatiskt linjärt oberoende.
 - ON-bas: bas av ortonormala vektorer. Hittas mha Gram-Schmidt.
- Vektor/kryss-produkt
 - $|u \times v| = |u||v|\sin(\alpha)$ där α är vinkeln mellan u och v .
 - $u \times v$ vinkelrät mot både u och v .
 - Orientering: $(u, v, u \times v)$ *högerorienterad*.
- Geometri
 - Ekvation för plan/linjer (med och utan parameterform.)
 - Skärning mellan {linje, plan} och {linje, plan}: lös ekvationssystem!
 - Avstånd mellan {punkt, linje, plan} till {linje, plan}: projicera! (Alternativ: ställ upp ekvationssystem för ortogonalitet etc och lös.)
- Matriser
 - Speciella matriser: enhetsmatriser, diagonala, över-triangulära, under-triangulära.
 - Transponat: med $A = (a_{ij})$ är $A^t = (a_{ji})$. A är *symmetrisk* om $A^t = A$. Notera att $(AB)^t = B^t A^t$.
 - En linjär avbildning $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ kan beskrivas med en $n \times m$ matris. ("Ta reda på var enhetsvektorerna tar vägen".)
 - Viktiga geometriska avbildningar: vridning, spegling, projektion.
- Ekvationssystem
 - Skrivs kort som: $Ax = b$.
 - Om $b = 0$ finns alltid den *triviala lösningen* $x = 0$. Annars: lösning finns $\Leftrightarrow b \in \text{Range}(A)$.
 - Hur lösa? Gausselimination! (Gör radoperationer tills systemet blir på trappform, bakåtsubstituera sedan.)
 - Minstakvadratmetoden: Om $Ax = b$ saknar lösning, hitta "bästa möjliga lösning", dvs minimera felet $|Ax - b|$. Hur? Lös

$$A^t Ax = A^t b.$$

- Determinanter
 - Geometrisk tolkning: $|\det(A)|$ ger area/volym (i $\mathbb{R}^2$ respektive $\mathbb{R}^3$.)

- Viktig egenskap: determinanten som funktion i godtycklig rad/kolonn är linjär.
- $\det(A)$ oförändrad vid vissa rad/kolonnoperationer (t.ex. lägg till multipel av en rad till en annan rad.) *Byter tecken* om vi byter plats på två rader/kolonner.
- Regler: $\det(A^t) = \det(A)$, $\det(I) = 1$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Uträkning av $\det(A)$.
 - * 2×2 : formel.
 - * 3×3 : formel eller Sarrus (men se även nedan.)
 - * $n \times n$, $n > 3$:
 - $\det(A)$ lätt att räkna ut om A är övertriangulär - "gör om" A till övertriangulär mha radoperationer.
 - Utveckling efter rad/kolonn (speciellt om en rad/kolonn har många nollor.)
- Determinanter och ekvationssystem
 - Om A är kvadratisk har ekvationssystemet $Ax = b$
 - * *precis en* lösning oavsett vad b är om $\det(A) \neq 0$.
 - * ingen, eller oändligt många lösningar (det beror på b) om $\det(A) = 0$.
 - Icke-kvadratiske system: om $Ax = b$ har fler obekanta än ekvationer så har:
 - $Ax = 0$ oändligt många lösningar.
 - $Ax = b$, $b \neq 0$ antingen oändligt många lösningar, eller ingen lösning.
 - Baser, beroende, oberoende.
 - *Linjärkombination*: uttryck på formen

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_kv_k$$
 där $v_1, v_2, \dots, v_k$ är vektorer och $x_1, \dots, x_k$ skalärer.
 - *Linjärt oberoende*:

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_kv_k = 0$$
 endast om $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$.
 - *Linjärt beroende*: kan hitta $x_1, \dots, x_k$, ej alla lika med noll, så att

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_kv_k = 0.$$
 - Kolonnvektorer i en kvadratisk matris är oberoende $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.
 - *Bas* för $\mathbb{R}^n$: samling vektorer $v_1, v_2, \dots, v_k$ så att
 - * $v_1, v_2, \dots, v_k$ är *oberoende*.
 - * Alla $w \in \mathbb{R}^n$ kan skrivas som

$$w = x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_kv_k.$$
 ($x_1, x_2, \dots, x_k$ kallas *koordinater* för w i basen $v_1, \dots, v_k$.)
 - Om $v_1, v_2, \dots, v_n$ är *oberoende* vektorer i $\mathbb{R}^n$ bildar de en bas.
 - Inverser
 - Om A är kvadratisk matris och B är en matris så att $AB = BA = I$ (där I är identitetsmatrisen) är A *inverterbar*. Matrisen B skrivs oftast som A^{-1} .
 - A inverterbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.
 - Hur finna A^{-1} ? Ställ upp ekvationssystem $(A|I)$ och gör radoperationer tills du får $(I|B)$; B är då inversen till A .
 - $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

- Egenvärden/egenvektorer

- Om A är kvadratisk matris, $v \neq 0$ en vektor och $\lambda \in \mathbb{R}$ så att

$$Av = \lambda v$$

säger vi att v är en *egenvektor* till A med *egenvärdet* λ .

- Hur hitta egenvärden? Lös ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$.
- Hur hitta egenvektor? Om $\det(A - \lambda I) = 0$ så har $(A - \lambda I)x = 0$ icke-triviala lösningar - lös ekvationssystemet!
- När kan vi hitta bas av egenvektorer?
 - * Spektralsatsen: en $n \times n$ -matris A har n stycken *reella* egenvärden och n stycken *ortogonala* egenvektorer $\Leftrightarrow A^t = A$.
 - * Om $\det(A - \lambda I) = 0$ har n stycken olika lösningar för en $n \times n$ -matris A , så har A n stycken oberoende egenvektorer.
 - * Om $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$ för alla egenvärden λ , dvs samma algebraisk och geometrisk multiplicitet.
- Om $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k$ och $v_1, \dots, v_k$ är egenvektorer till en matris A , så är

$$A^n w = x_1 \lambda_1^n v_1 + x_2 \lambda_2^n v_2 + \dots + x_k \lambda_k^n v_k$$

- Följd: Om $\lambda_1 = 1$ och övriga egenvärden har belopp mindre än ett så är systemet *stabilt*, dvs $A^n w$ går mot $x_1 v_1$ då $n \rightarrow \infty$.

- Baser/koordinater: $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ bas för V .

- $v = \sum x_i v_i$ omm $[v]_B = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$.

$$v \in V \xrightarrow{T} V \ni Tv$$

- $[T]_B$ defineras av:

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow & \downarrow \\ [v]_B \in \mathbb{R}^n & \xrightarrow{[T]_B} & \mathbb{R}^n \ni [Tv]_B \end{array}$$

- Hur byta bas? Lös ekvationssystem!
- Basbytesmatriser: B, D baser, $[v]_D = P_{B \rightarrow D}[v]_B$, där $P_{B \rightarrow D}$ är basbytesmatrisen från B till D . Då gäller:

$$[T]_D = P_{B \rightarrow D}[T]_B P_{D \rightarrow B} = P_{D \rightarrow B}^{-1}[T]_B P_{D \rightarrow B}$$

eftersom $P_{B \rightarrow D} = P_{D \rightarrow B}^{-1}$.

- Låt $T: V \rightarrow W$ vara linj. avb. Om $B = (u_1, \dots, u_n)$ är bas för V , och B' är bas för W så fås matrisen för T , relativt baserna B och B' av

$$[T]_{B', B} = \begin{bmatrix} \left| \begin{array}{c} [T(u_1)]_{B'} \\ \vdots \end{array} \right| & \left| \begin{array}{c} [T(u_2)]_{B'} \\ \vdots \end{array} \right| & \dots & \left| \begin{array}{c} [T(u_n)]_{B'} \\ \vdots \end{array} \right| \end{bmatrix}$$

- Abstrakta vektorrum.

- Underrum, beroende/oberoende, bas, dimension.
- $F: V \rightarrow W$.

- * $\ker(F) \subset V$, $\text{Range}(F) \subset W$ (underrum!).

- * $\dim(\ker(F)) + \dim(\text{Range}(F)) = \dim(V)$

- Om $\dim(V) < \infty$ och $F: V \rightarrow V$ så är F surj. omm F injektiv.

- Diagonalisering: givet kvadratisk matris A , hitta *diagonal* matris D och *inverterbar* matris P så att

$$A = PDP^{-1} \Leftrightarrow D = P^{-1}AP$$

- Kan diagonalisera en $n \times n$ -matris $A \Leftrightarrow$ matrisen A har n oberoende egenvektorer.

* Om $v_1, v_2, \dots, v_n$ är egenvektorer till A , med egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, så är

$$P = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

och D är diagonalmatrisen med $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ på diagonalen.

- Om $A = PDP^{-1}$ så är $A^n = PD^nP^{-1}$. (Poäng: D^n lätt att beräkna.)
- Om $A^t = A$ kan vi hitta *ortogonal* diagonalisering, dvs P är ortogonal.

• Kvadratiske former

- Kan skrivas $q(x) = x^t Ax$ där A är symmetrisk och $x = [x_1, \dots, x_n]^t \in \mathbb{R}^n$.

- Om egenvärdena till A är $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, så är

* A *positivt definit* om $\lambda_1 > 0$. (q *positivt definit* om $q(x) > 0$ för $x \neq 0$.)

* A *indefinit* om egenvärdena har olika tecken, dvs $\lambda_1 < 0, \lambda_n > 0$.

* $\lambda_1 |x|^2 \leq q(x) \leq \lambda_n |x|^2$ gäller för all $x \in \mathbb{R}^n$

* Om $P^{-1}AP = P^tAP = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sägs variabelbytet $x = Py$ *diagonalisera den kvadratiske formen* q ; vi får $x^t Ax = y^t P^t A P y = y^t D y = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$.

* P ortogonal ger att principalaxlarna för q är vinkelräta.