

Förel 1: § 1.1 — 1.6

1. Om funktioner

Beteck. $\mathbb{R} = \{\text{reella tal}\}$

$x \in \mathbb{R}$: x är ett reellt tal

$x \notin \mathbb{R}$: x är inte ett reellt tal

$A \Rightarrow B$ (A implicerar B)

$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \text{icke } B \Rightarrow \text{icke } A$

funktionsbegrepp

$D(f): \{a \leq x \leq b$
 $y = f(x) \text{ har}$
 $\text{en mening}\}$

Def. mängd för f

$V(f) = \{c \leq y \leq d, x \in D(f)\}$

Värde mängd för f .

Def 1 En fkn f ($E \ni f(x)$)

är en avbildning som till varje $x \in D(f)$
ordnar precis ett $y \in V(f)$

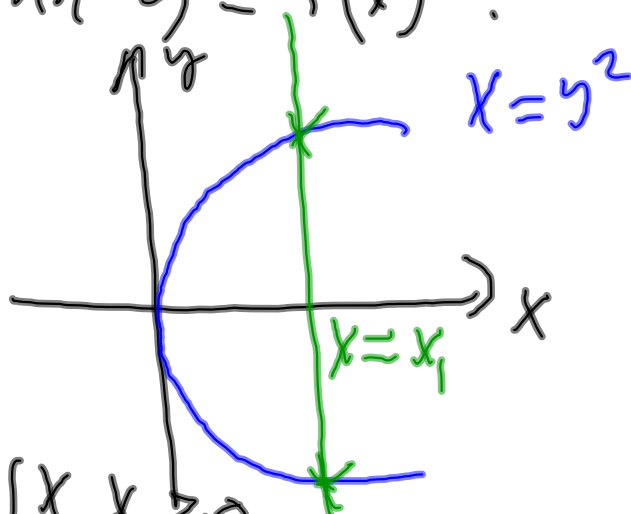
Ins $\left. \begin{array}{l} f(x) = y_1 \\ f(x) = y_2 \end{array} \right\} \Rightarrow y_1 = y_2$

Geom Varje linje $x = x_1$ $a < x_1 < b$
skar kurvan till f högst en
gång.

Ex1 Kan sambandet $x = y^2$ definierar en fkn $y = f(x)$?

Lösning

Svar nej!



Ex2

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Svar ja!

Elementära funktioner

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

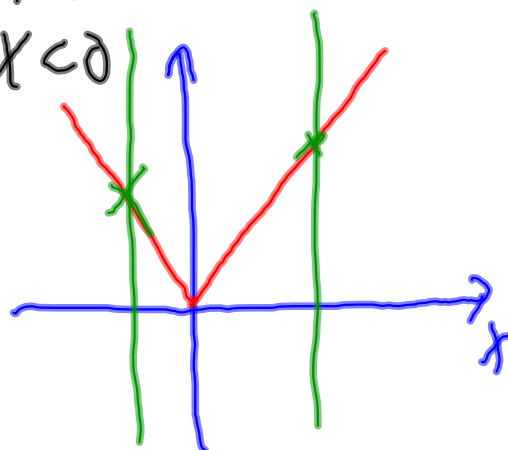
$$^a \log x, \quad e^{\log x} = \ln x, \quad \ln |x|$$

$$e^x, \quad a^x, \quad x^a, \quad x > 0$$

$$\sin x, \quad \cos x, \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

aktas vara kända



EX3 Hur finner man $D(f)$

För vilka x är $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$ def.?

Lösning a) $\sqrt{g(x)}$ def endast då
 $g(x) \geq 0$ (annars komplex)

Här $g(x) = x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3) \geq 0$

b) Gör en tabell

x	-2	3
$x+2$	$-$	$+$
$x-3$	$-$	$+$
$x^2 - x - 6$	$+$	$+$

$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$ är def då

$$x \leq -2, \quad x \geq 3$$

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -2, x \geq 3\}$$

2. Geometrisk summ

Def. $a + ax + ax^2 + \dots + ax^{n-1}$
 n : # termer

$$= \sum_{k=0}^{n-1} ax^{k-1} = S_n$$

steg $k = \frac{ax^k}{ax^{k-1}} = x$: kvoten.

Finns summan $\sum_{k=0}^{n-1} ax^k = S_n$

$$(1) S_n = a + ax + \dots + ax^{n-1}$$

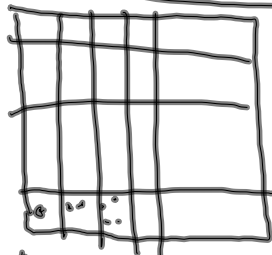
$$(2) xS_n = ax + ax^2 + \dots + ax^{n-1} + ax^n$$

$$(2) - (1): xS_n - S_n = ax^n - a$$

$$\Rightarrow (x-1)S_n = ax^n - a = a(x^n - 1)$$

$$S_n = a \cdot \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

Ex 3



64 rutor

Risikorn!

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} =$$

$$= \left[S_n = \frac{x^n - 1}{x - 1} \text{ har } x=2, n=63 \right]$$

$$= \frac{2^{63} - 1}{2 - 1} = 2^{63} - 1$$

kubikmeter $m^3 \approx 15 \cdot 10^6$ risikorn
 $2^{63} - 1 \approx 1.8 \cdot 10^{19}$

$\frac{1.8 \cdot 10^{19}}{15 \cdot 10^6} \approx 1.2 \cdot 10^{12} m^3$

Binomial formeln. handlar

om att räkna ut $(a+b)^n$

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$$

$$\text{Def. } n! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)}_{(n-1)!} \cdot n = (n-1)! \cdot n$$

$$0! = 1! = 1$$

Vad innebär $n!$?

$n!$ = antalet sätt att sortera
n element i en viss ordning
= antalet "passw" av n olika
element (utan repetition)

Hur många password utan repet
kan vi ha med $\{1, 2, 3\}$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

123, 132, 231, 213, 312, 321

$$\text{Def } \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}, \quad n \geq k$$

uttalas "n över k"

= antalet delmängder av storlek
 k i en mängd av n element

Ex $\{1, 2, 3\}$ tennis spelare
skall möta varandra!
Hur många matcher!

$$n=3, \quad k=2$$

$$\binom{n}{k} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1! \cdot 2!} = 3$$

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$

Räknelagar (Lätt att kolla)

$$1) \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$2) \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

$$3) \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Binomial formeln

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

EX. Finn koeff. fram för x^{13}
i polynomet $(x+1)^{15}$

Lösning: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Sätt in $a=x$, $b=1$, $n=15$

$$(x+1)^{15} = \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} x^{15-k} 1^k$$

$$= \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} x^{15-k}$$

koeff fram för x^{15-k} är $\binom{15}{k}$

Vill ha koeff fram för x^{13}

Så välj $k=2$ som ser att koeff. fram för x^{15-2} är $\binom{15}{2}$

är koeff fram för x^{13} är $\binom{15}{2}$

$$\binom{15}{2} = \frac{15!}{(15-2)! 2!} = \frac{15!}{13! 2!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13!}{13! \cdot 2} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 7 \cdot 15 = 105$$

Svar koeff fram för x^{13} i polynomet $(x+1)^{15}$ är 105

Potenser

För $a > 0$, $n =$ heltal positivt
 $= 1, 2, 3, \dots$

Så här ser det ut:

$x^n = a$ exakt en positiv lösning

$x_n = \sqrt[n]{a}$
man skriver ✓

$$x_n = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

↑
rotform

↑
potensform

Bra ex att tänka på
vilka av talen $n^{1/n}$??
 $n = 1, 2, 3, \dots$ är störst ??

potensregler

$f(x) = a^x > 0$ Exponential
fkn

$$1) a^x \cdot a^y = a^{(x+y)} \neq a^{xy}$$

$$2) \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$3) (a^x)^y = a^{(xy)} (*)$$

$$4) (ab)^x = a^x b^x$$

$$5) \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} = a^x (b^{-x})$$

Ex Lös $3^x + 2 \cdot 3^{x+1} = 21$

Lösning Använd Potensresler:

$$3^{x+1} = 3^x \cdot 3^1 = 3 \cdot 3^x$$

in i ekv:

$$3^x + 2 \cdot 3 \cdot 3^x = 21$$

$$7 \cdot 3^x = 21$$

$$\Rightarrow 3^x = \frac{21}{7} = 3^1$$

$$\therefore 3^x = 3^1 \Rightarrow x = 1$$