

- Förel 10:
- Hur man integrera rationella fkn
 - Generaliserade integraler

• Hur man integrera rationella fkn

dvs $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\text{polynom}}{\text{polynom}}$

① Om $\text{grad}(P) \geq \text{grad}(Q)$

Gör en division

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = g(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

$$\text{grad}(R) < \text{grad}(Q)$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int g(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

② Ta fram $\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$ via

partial bråks ansats
ansats för $\frac{R(x)}{Q(x)}$

$(x-a)(x-b)$ $a, b \in \mathbb{R}$	$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$
$(x-a)(x-c)^2$ $x=c$ dubbel rot	$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-c} + \frac{F}{(x-c)^2}$
$(x-a)(x^2+\beta)$ icke reella rotter	$\frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{x^2+\beta}$

Ex 1 Beräkna

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+7x+12} dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

steg 1 Division $\text{deg}(P)=3 > \text{deg}(Q)=2$

$$\frac{x^3+1}{x^2+7x+12} = \underbrace{x-7}_{g(x)} + \frac{37x+85}{x^2+7x+12} = \frac{R(x)}{Q(x)}$$

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+7x+12} dx = \int \underbrace{(x-7)}_{\frac{x^2-7x+C_1}{2}} dx + \int \underbrace{\frac{37x+85}{x^2+7x+12}}_{I_2} dx$$

steg 2 Beräkna I_2 .

$$\text{När } Q(x) = x^2+7x+12 = 0 \Rightarrow x = -4, -3 \\ (x+4)(x+3)$$

Ansatsen blir

$$\frac{37x+85}{(x+4)(x+3)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x+3}$$

Reducera till samma nämnare

$$\frac{37x+85}{(x+4)(x+3)} = \frac{A(x+3) + B(x+4)}{(x+4)(x+3)}$$

Identifiering

$$37x+85 = A(x+3) + B(x+4) \\ = (A+B)x + 3A+4B$$

Sätt om

$$\begin{cases} 37 = A+B \\ 85 = 3A+4B \end{cases}$$

Vi får då

$$\int \frac{37x+85}{x^2+7x+12} dx = \int \frac{63}{x+4} dx - \int \frac{26}{x+3} dx$$
$$= 63 \ln|x+4| - 26 \ln|x+3| + C$$

steg 3 skriv svaret

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+7x+12} dx = \frac{x^2}{2} - 7x + 63 \ln|x+4|$$
$$- 26 \ln|x+3| + C$$

• Om generaliserade integraler

$\forall \epsilon > 0$ om f är kontin. på $[a, b]$
 så ha f en primitiv funktion F

$$F'(x) = f(x) \quad a \leq x \leq b$$

$$\text{där } F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Alla gör man om

(1) $[a, b]$ är obegränsat och f kontinuerlig

(2) $[a, b]$ begränsat men f ej kont på $[a, b]$

Def Integralen $\int_a^b f(x) dx$ säges vara generaliserad om

(1) Intervallet (a, b) obegränsat men f kont på (a, b)

Ex $\int_0^{\infty} f(x) dx, \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \int_{-\infty}^a f(x) dx$
 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx, \int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2} dx, \int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2} dx, \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx, \int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2} dx, \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$

(2) Intervallet (a, b) begränsat men f ej kontinuerlig

Ex $\int_a^b \frac{1}{x-a} dx, \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$

Def $\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$

① Finn en primitiv F till f
på $a \leq x \leq b$

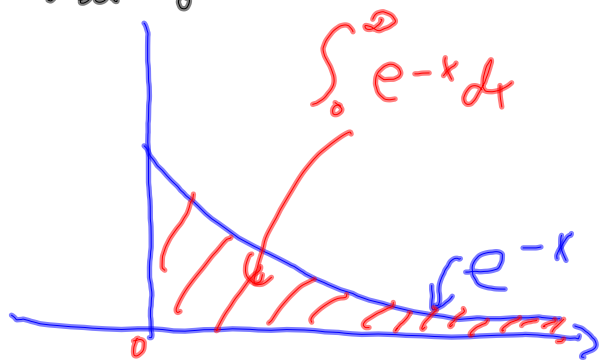
$$F'(x) = f(x)$$

② $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

③ $\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} F(b) - F(a)$

Ex 2 undersök om $\int_0^\infty e^{-x} dx$
är ändligt, dvs

om $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = A < \infty$



$\int_0^\infty e^{-x} dx =$ att kunna måla området
 $\{(x,y): 0 \leq x < \infty, 0 \leq y \leq e^{-x}\}$

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} I(b)$$

där

$$I(b) = \int_0^b e^{-x} dx = \left[\frac{e^{-x}}{-1} \right]_0^b$$

$$= -(e^{-b} - e^0) = 1 - e^{-b}$$

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (1 - e^{-b})$$

$$= 1 - 0 = 1$$

$$\text{Om } \int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = A$$

ett TAL så säges att

den generaliserade integralen

$\int_a^{\infty} f(x) dx$ är konvergent

annars Divergens föreligger.

ATT kunna väl

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \\ \infty, & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Lösning

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} I(b)$$

där $I(b) = \int_1^b \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \int_1^b x^{-\alpha} dx$

Fall $\alpha \neq 1$

$$\int_1^b x^{-\alpha} dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^b = \frac{b^{1-\alpha} - 1^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

$$= \frac{1}{\alpha-1} - \frac{b^{1-\alpha}}{\alpha-1}$$

$b^{1-\alpha} \xrightarrow{b \rightarrow \infty} \infty$
 då $1-\alpha > 0 \Leftrightarrow 1 > \alpha \Leftrightarrow \alpha < 1$
 $b^{1-\alpha} \xrightarrow{b \rightarrow \infty} 0$
 om $1-\alpha < 0 \Leftrightarrow 1 < \alpha \Leftrightarrow \alpha > 1$

Del svar
 för $\alpha \neq 1$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \\ \infty, & \alpha < 1 \end{cases}$$

Fall $\alpha = 1$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx =$$

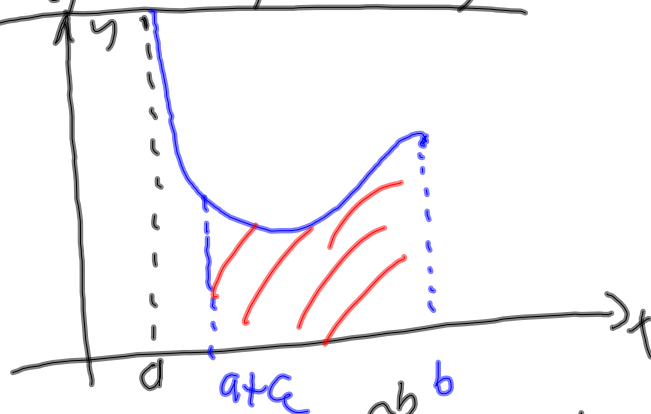
$$= \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln x]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(b) - \underbrace{\ln(1)}_{=0}$$



$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \infty$$

Divergens
 för alla α

Fall då (a,b) ändligt men f ej kont på (a,b)



$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

då $f(x)$ ej kont (def) i $x=a$

Ex $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ \infty, & \alpha \geq 1 \end{cases}$

Lösning här $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}, \alpha \geq 0$

av ej def i $x=0$

$$\int_0^1 x^{-\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 x^{-\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(\varepsilon)$$

$$I(\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 x^{-\alpha} dx.$$

Fall $\alpha \neq 1$

$$I(\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 x^{-\alpha} dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \right]_\varepsilon^1 =$$

$$= \frac{1^{-\alpha+1}}{1-\alpha} - \frac{\varepsilon^{-\alpha+1}}{1-\alpha}$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

$$I(\varepsilon) = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

$\varepsilon^{1-\alpha} \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$
 precis då $1-\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < 1$
 eller $\alpha < 1$

$\varepsilon^{1-\alpha} \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$
 precis då $1-\alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$
 eller $\alpha > 1$

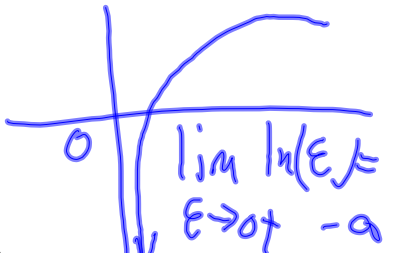
Del svar

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ \infty, & \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\alpha \neq 1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx =$$

$$\approx \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\ln x \right]_\varepsilon^1 = \ln(1) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln(\varepsilon)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \infty$$


$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln(\varepsilon) = -\infty$

Ex för vilka $\alpha \in \mathbb{R}$ är
 $\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ konvergent

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_\varepsilon^b \frac{1}{x^\alpha} dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha}} dx}_{\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1-\alpha}, \alpha < 1 \\ \infty, \alpha \geq 1 \end{array} \right.}} + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx}_{\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\alpha-1}, \alpha > 1 \\ \infty, \alpha \leq 1 \end{array} \right.}}$$

finns ej gemensam

$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$ är ändligt

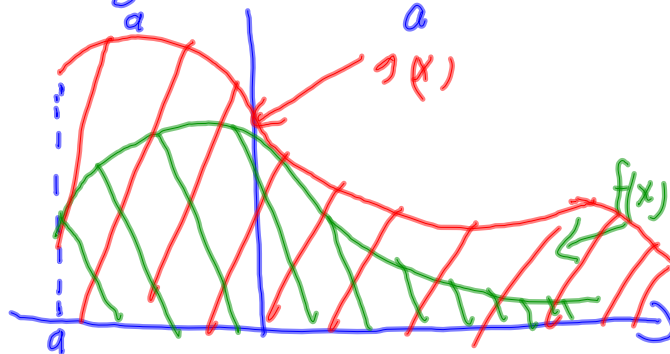
dvs $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$ är divergent för alla $\alpha \in \mathbb{R}$

Jämförelse kriterium

om $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \geq a$

Då gäller att

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \leq \int_a^{\infty} g(x) dx$$



om $\int_a^{\infty} g(x) dx = A < \infty$

$$\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) dx < \infty$$

om $\int_a^{\infty} g(x) dx = \infty$

$$\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) dx = \infty$$

Ex undersök om

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + \ln x} dx$ är konvergent?

Lösning svårt att beräkna

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + \ln x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2 + \ln x} dx$$

Vi observerar

$$A > B > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{B} > \frac{1}{A}$$

$$x^2 + \ln x > x^2, \quad x > 1$$

$$\frac{1}{x^2 + \ln x} < \frac{1}{x^2}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + \ln x} dx < \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = -\frac{1}{b} + \frac{1}{1} \xrightarrow[b \rightarrow \infty]{} 1$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + \ln x} dx < \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$$

Vi visar att

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + \ln x} dx \text{ är } \underline{\underline{\text{konv}}}$$