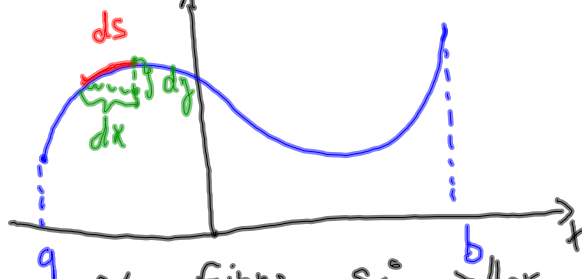


Förel 11: Tillämpning av Integraler

- Båglängden av kurvan $y = f(x)$
- Rotationskroppsberekening

- Båglängden till kurvan $y = f(x)$

$x: a \rightarrow b$



Om $f'(x)$ finns så gäller
att längden av kurvan $y = f(x)$
 $x: a \rightarrow b$ ges av

$$L = \int_a^b ds(x) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

• Motivering

a) Via differentialer

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)(dx)^2$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$L = \int_a^b ds(x) = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

b) Via Riemanns summa



Indela båglängden L i oändligt många
små ΔS_k :

$$\Delta S_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} \Delta x_k$$

Bilda Riemannsummor

$$R_n(L) = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} \Delta x_k$$

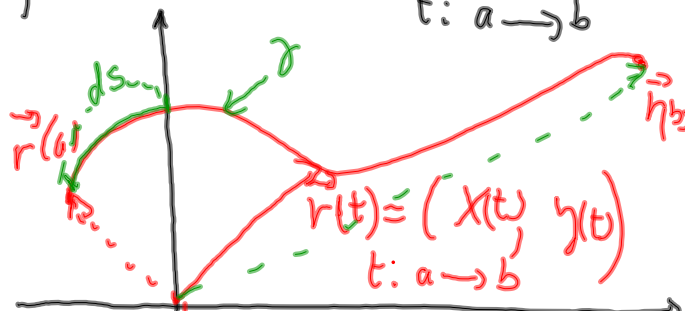
När inledningen görs "oändligt många" små

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} \rightarrow \frac{dy}{dx} \quad , \quad \Delta x_k \rightarrow dx$$

$$R_n(L) = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} \Delta x_k$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Tillämpning: en partikel rör sig på banan $\gamma: \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$
 $t: a \rightarrow b$



$$\textcircled{1} \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \left(\frac{d}{dt} x(t), \frac{d}{dt} y(t) \right) = (\dot{x}, \dot{y})$$

hastighetsvektor.

$$\textcircled{2} \left| \frac{d}{dt} \vec{r}(t) \right| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = v(t)$$

= farten.

$$\textcircled{3} ds(t) = v(t) dt$$

④ Längden av kurvan γ

$$L \approx \int_a^b ds(t) \approx \int_a^b v(t) dt$$

$$\approx \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$$

om γ ges au $y = f(x)$,

$$x: a \rightarrow b$$

$$\begin{cases} x = t & : a \rightarrow b \\ y = f(t) \end{cases}$$

$$v(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{1 + (f'(t))^2}$$

$$L = \int_a^b v(t) dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$

Ex Kalle vandrar med konstant
hastighet 4 km/h

upp för en backe med
ekv $y = \int_2^x \sqrt{t^2 - 1} dt$ $2 \leq x \leq 4$

(enhet i km)

Hur lång tid tar det för
Kalle att passera backen?

Lösning backen ekv är
 $y = f(x)$, $2 \leq x \leq 4$

Längden av backen ges av

$$L = \int_2^4 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Vet att $y(x) = f(x) = \int_2^x \sqrt{t^2 - 1} dt$

Hur fås $f'(x)$?

Enligt analysens grundsat 5
gäller att

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$$

$$\text{Här } \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_2^x \sqrt{t^2 - 1} dt \right) = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$L = \int_2^4 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_2^4 \sqrt{1 + (\sqrt{x^2 - 1})^2} dx$$

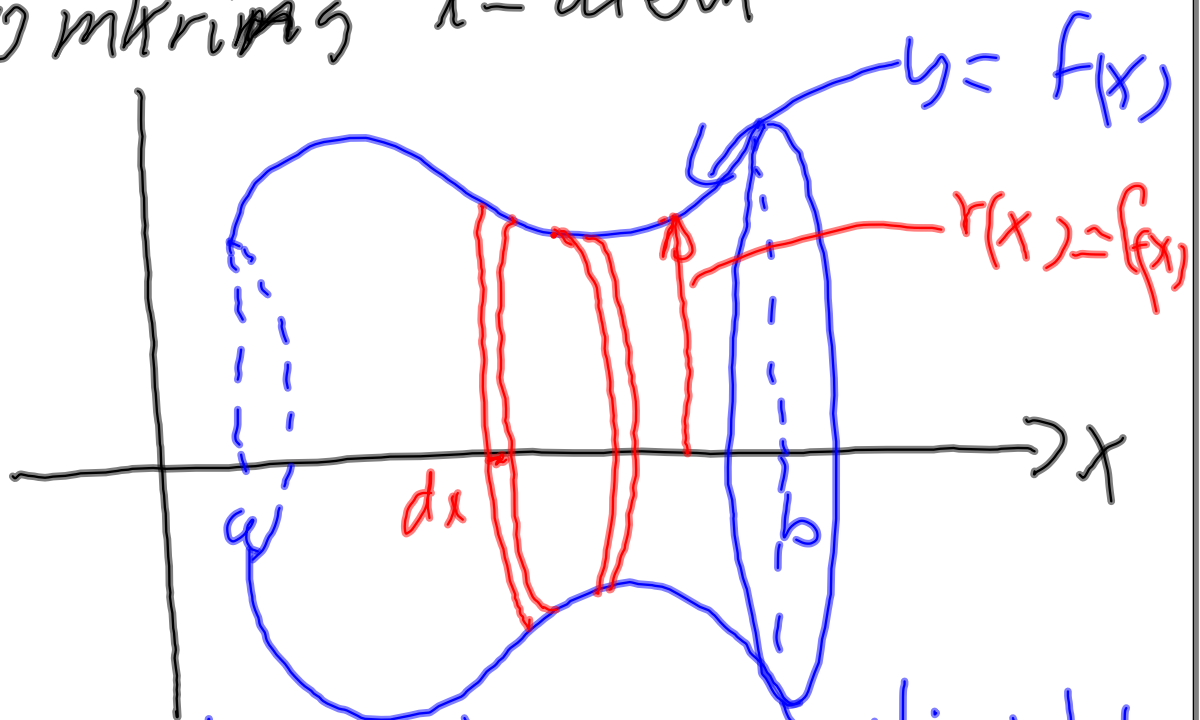
$$= \int_2^4 \sqrt{1 + x^2 - 1} dx = \int_2^4 \sqrt{x^2} dx$$

$$= \int_2^4 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^4 = \dots = 6 \text{ km}$$

Det tar $\frac{L}{v} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ h}$
att passera backen

Rotations kropps beräkning

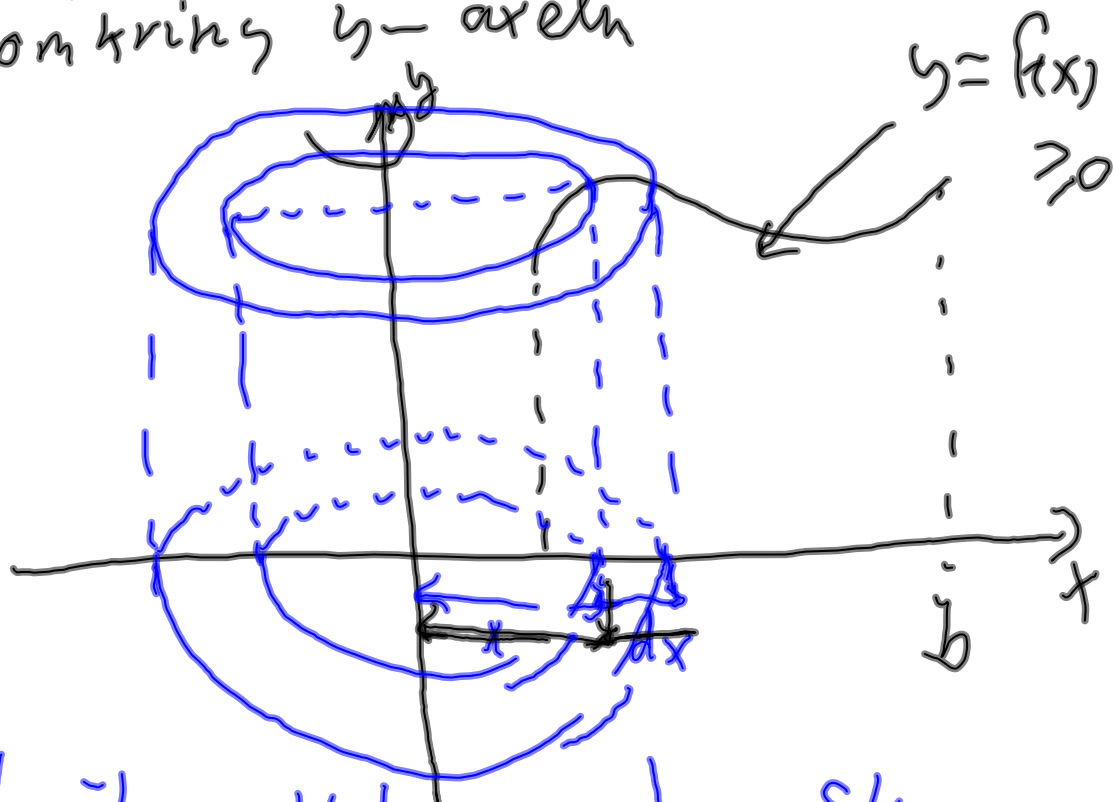
1. $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ roterar
omkring x -axeln



$$dV(x) = \underbrace{\text{basarean}}_{\pi r^2(x)} \times \underbrace{\text{tjocklek}}_{dx}$$

$$V_x = \int_a^b dV_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx \geq 0$$

2. $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ roterar
omkring y -axeln



Vi beräknar Volymen m ha sk
"Rör element"

Volymen för röret

$$dV(x) = \underbrace{(omkrets)}_{2\pi x} \underbrace{(höjden)}_{f(x)} \underbrace{(tjocklek)}_{dx}$$

$$V_y = \int_a^b dV(x) = \int_a^b 2\pi x f(x) dx \geq 0$$

Bra Ex $D = \{(x,y): 1 \leq x \leq 2, y = \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\}$
 Beräkna volymen i följande fall.

① D roterar ett varv kring x-axeln

② D roterar ett varv kring y-axeln

Lösning ① $V_x = \pi \int_1^2 (f(x))^2 dx \geq 0$

$$= \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{x\sqrt{x+1}} \right)^2 dx = \pi \int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)} dx$$

$$= \pi [F(x)]_1^2$$

Finn en primitiv fun $F(x)$ till $\frac{1}{x^2(x+1)}$. Här används part. brak uppdelning.

$$x^2(x+1) = 0, x = 0, 0, -1$$

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

Reducera till samma nämnare

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A(x(x+1)) + B(x+1) + Cx^2}{x^2(x+1)}$$

Sant om

$$1 = A x(x+1) + B(x+1) + Cx^2$$

$$A x^2 + Ax + Bx + B + Cx^2$$

$$1 = (A+C)x^2 + (A+B)x + B$$

Sant om

$$1 = B$$

$$0 = A+C \Rightarrow C = -A = 1$$

$$0 = A+B \Rightarrow A = -B = -1$$

$$\therefore A = -1, B = 1, C = 1$$

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$= [A=-1, B=1, C=1]$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)} dx = \int_1^2 -\frac{1}{x} dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx + \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx$$

$$= -\left[\ln x\right]_1^2 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 + \left[\ln(x+1)\right]_1^2$$

$$= -(\ln 2 - \ln 1) - \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{1}\right) + \ln(2+1) -$$

$$\ln(1+1) = -\ln 2 - \frac{1}{2} + \ln 3 - \ln 2$$

$$= \ln 3 - 2\ln 2 + \frac{1}{2}$$

$$= \ln 3 - \ln 4 + \frac{1}{2}$$

$$= \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}$$

SVar

$$V_x \approx \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{x\sqrt{x+1}}\right)^2 dx = \pi \left(\ln\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}\right)$$

$$\textcircled{2} V_y = \int_1^2 2\pi x f(x) dx \geq 0$$

$$= \int_1^2 2\pi x \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$$

$$= 2\pi \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$\begin{cases} t: x+1 \\ \frac{dt}{dx} = 1 \Leftrightarrow \frac{dt}{dx} \\ x: 1 \rightarrow 2 \\ t: \frac{1+1}{2} \rightarrow \frac{2+1}{2} \end{cases}$$

$$= 2\pi \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2\pi \int_2^3 t^{-1/2} dt$$

$$= 2\pi \left[\frac{t^{-1/2+1}}{-1/2+1} \right]_2^3 = 2\pi \left[\frac{\sqrt{t}}{1/2} \right]_2^3 =$$

$$= 4\pi \left[\sqrt{t} \right]_2^3 = 4\pi(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \geq 0$$

$$\underline{\text{SVar}} \quad V_y = 2\pi \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x\sqrt{1+x}} dx = 4\pi(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \geq 0$$

ATT Förstå konvergens-divergens
av generaliserade integraler

Ex $f(x) = \frac{1}{x} \quad / \quad x \geq 1$



Area:
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx$$
$$= \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln x]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(b) = \infty$$

låt området rotas ett varu
kring x - axeln:

$$V_x = \pi \int_1^{\infty} (f(x))^2 dx = \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$
$$= \pi \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \pi \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b$$
$$= \pi \left(1 - \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b} \right) \right) = \pi$$

Ex' $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $0 < x \leq 1$



$$\begin{aligned} \text{Area} &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 x^{-1/2} dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} \right]_{\epsilon}^1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{\sqrt{x}}{1/2} \right]_{\epsilon}^1 \\ &= 2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (\sqrt{1} - \sqrt{\epsilon}) = 2. \text{ area} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_x &= \int_0^1 \pi (f(x))^2 dx = \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x} dx \\ &= \pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\ln x \right]_{\epsilon}^1 = \pi \left(- \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln(\epsilon) \right) \end{aligned}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln \epsilon = -\infty$$

$$V_x = -(-\infty) = \infty$$

