

Förel nr 20: Om serier
(finns som häfte att laddas ner)

Ibland behöver vi räkna ut
summan av oändligt många tal

Ex 1. $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Dessa summor kallas för serier och
 de tal som summeras kallas för
 seriens termer.

Def En serie, består av två
 begrepp

① en talföljd: $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

② en partialföljd $(S_n)_{n=1}^{\infty}$

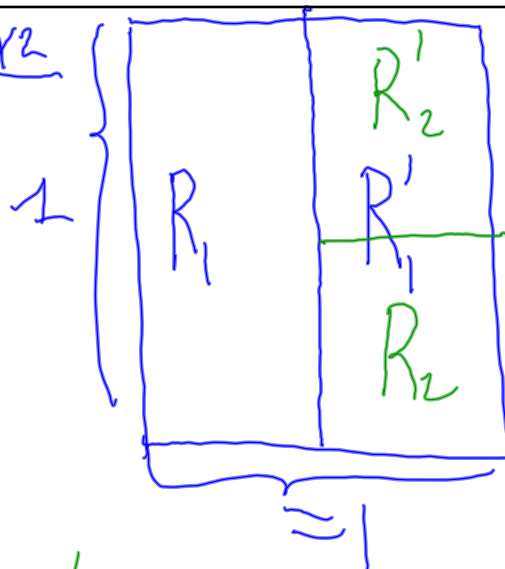
$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Serien ser ut så här

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Ex2



R : kvadrat

① R delas
i 2 lika
rektanglar,
 R_1 och R'_1

② R'_1 delas
i 2 lika rektanglar
 R_1 och R'_2

③ R'_2 delas i 2 lika
rektanglar R_3 och R'_3

Vi får en följd av rektanglar
 $R_1, R_2, \dots, R_n, R_{n+1}, \dots$
med areor

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2, a_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3, \dots$$

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \dots$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$$

LX3



$\text{tid}_n = n$ befinner sig i a_n

$$\sum_{k=1} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Om alla $a_k = 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \dots = \infty$$

Def Serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ säges

vara konvergent om $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$

$$\text{där } S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

annars säges att Serien

Divergerar!

Obs! konvergensen kräver

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+m} \quad (m \text{ fixt tal})$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n+m}) = 0$$

$$\text{Om } \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n+m}) \neq 0$$

Så divergerar Serien

Bra EX Berechna $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

Lösung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \left[\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} \right]$$

$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)$$

$k=1 \quad k=2$

$$+ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \dots$$

$k=3 \quad k=4$

$$+ \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

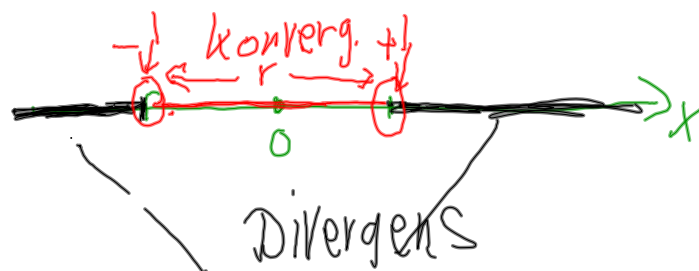
$k=n-1 \quad k=n$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

Geometrisk serie (ATT kunna Väl)

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \begin{cases} \frac{a}{1-r}, & |r| < 1 \\ \infty, & |r| \geq 1 \end{cases}$$



Bra Ex

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3+2^k}{3^{k+2}} = \frac{3+2^k}{3^{k+2}} = \frac{3}{3^{k+2}} + \frac{2^k}{3^{k+2}}$$

$$\frac{3}{3^{k+2}} = \frac{1}{3^{k+1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^k}$$

$$\frac{2^k}{3^{k+2}} = \frac{2^k}{3^k 3^2} = \frac{1}{3^2} \cdot \frac{2^k}{3^k} = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3+2^k}{3^{k+2}} &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^k \end{aligned}$$

Använd

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \begin{cases} \frac{a}{1-r}, & |r| < 1 \\ \infty, & \text{annars} \end{cases}$$

$$S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{3}}_a \left(\underbrace{\frac{1}{3}}_r \right)^k = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{9}}_a \left(\underbrace{\frac{2}{3}}_r \right)^k = \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

Svar

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3+2^k}{3^{k+2}} = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Ex Undersök om

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{är konvergent}$$

obs! $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$

Lösning

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{N}}}_{\geq \frac{1}{\sqrt{N}}} \geq \frac{1}{\sqrt{N}}$

$$\geq N \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} = \sqrt{N}$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{N} \rightarrow \infty \quad \text{da } N \rightarrow \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{div konvergerar}$$

Divergens TEST
för $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Om $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow$

serien Divergerar

Obs! om $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
innebär INTÉ att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv.

Förre ex $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverg

då $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$

Ex $\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \dots + 1 + \dots = \infty$

Här $a_n = 1 \not\rightarrow 0, \text{ då } n \rightarrow \infty$

Ex $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$
 $= ?$

Här $a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \not\rightarrow 0$

Serien är divergent

Motivation

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \begin{cases} \frac{1}{1-r}, & |r| < 1 \\ \infty, & |r| \geq 1 \end{cases}$$

$$r=1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \dots = \infty$$

$$r=-1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \begin{cases} 0 \\ \text{divergent} \end{cases}$$

for $r \neq 1$

$$S_n = \sum_{k=0}^n r^k = 1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1}}{1 - r}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} r \cdot r^n = r \lim_{n \rightarrow \infty} r^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 0, & |r| < 1 \\ \infty, & |r| > 1 \end{cases}$$

Förel 21 Jämförelse mellan
positiva serier och integraler
• L'Hôpital's regel

Def En serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ säges

vara positiv om alla $a_k \geq 0$

Integral TEST

Om $f(x) \geq 0$, $x \geq a$
och avtagande ($f'(x) \leq 0$)
så gäller att

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ och } \int_1^{\infty} f(x) dx$$

konvergerar (divergerar) samtidigt

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ konv} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ konv.}$$

Ex 1 Undersök om $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$
är konvergent!

Lösning sätt $f(k) = \frac{1}{1+k^2}$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{d}{dx}(\arctan x)$$

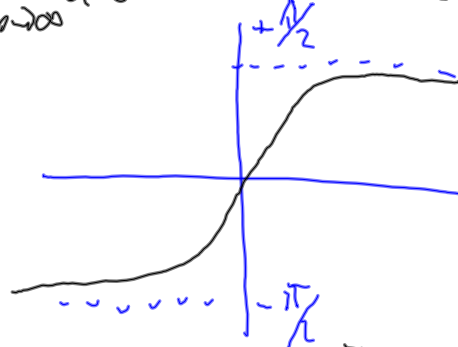
avtar. $f'(x) = \frac{-2x}{1+x^2} \leq 0$ alla $x \geq 1$

Då gäller Integral TEST

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} \quad (\text{jämförs}) \quad \text{med} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\arctan x \right]_1^{\infty}$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \arctan(b) - \arctan(1)$$



$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} \quad \text{konv.}$$

Svar $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$ är konv
men bekräftar
Ej vara $= \frac{\pi}{4}$

Ex 2 Undersök om $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

är konvergent.

Lösning sätt $f(k) = \frac{1}{k} \Rightarrow$

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ avtar, } f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

Integraltest ger att $x > 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad (\text{jämförs}) \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln(x)]_1^b$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(b) - \underbrace{\ln(1)}_{=0} = \infty$$

Svar $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ är divergent

Ex 3 Rep

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \\ \infty, & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Enligt Integral TEST

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \begin{cases} \text{konv. om } \alpha > 1 \\ \text{Div om } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

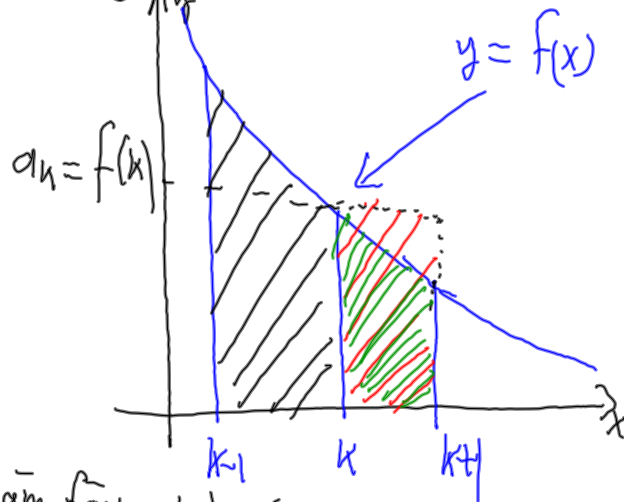
Riemann z -fkn, $z = x + iy$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z} = f(z)$$

Alla komplexa nollställen till $f(z)$ ligger på linjen $\sigma = 1/2$



Motivering för Integral TEST



Jämför ytorna

$$\int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k) \underbrace{(k+1-k)}_{=1} \leq \int_{k-1}^k f(x) dx$$

summera från $k=2$ till n

$$\sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \sum_{k=2}^n f(k) \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k f(x) dx$$

$$\underbrace{\int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^5 + \dots + \int_n^{n+1}}_{\int_2^{n+1}} f(x) dx$$

$$\int_2^{n+1} f(x) dx$$

U. för Till slut

$$f(1) \int_2^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=2}^n f(k) \leq f(1) \int_1^n f(x) dx$$

Integral uppskattning

$$f(1) + \int_2^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x) dx$$

Låt $n \rightarrow \infty$ och se vad
händer!

Hur använder man serien i praxis

Finna den minsta antalet termer
i serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^3}$ som

behövs för att approximeras
summan med ett fel $< \frac{1}{2} 10^{-2}$

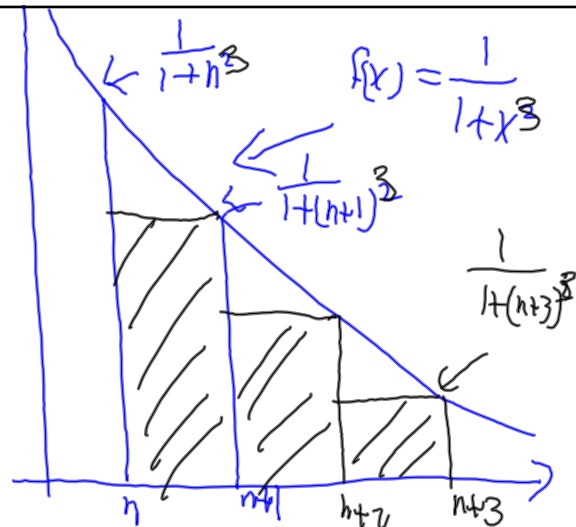
Lösning

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^3} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k^3} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{1+k^3}}_{\text{Rest termen}}$$

Vill ha

Rest termen $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{1+k^3} \leq \frac{1}{2} 10^{-2}$

dvs $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^3} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k^3} + \frac{1}{2} 10^{-2}$



$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{1+k^3} \leq \int_n^{\infty} \frac{1}{1+x^3} dx$$

$$\leq \int_n^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$$

$$\leq \frac{1}{2} 10^{-2}$$

$$\int_n^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_n^b =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{2b^2} - \left(-\frac{1}{2n^2} \right) = \frac{1}{2n^2}$$

Vi finn den önskade n

Via $\frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{2 \cdot 10^2}$ Välj $n=11$

Svar

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^3} = \sum_{k=1}^{11} \frac{1}{1+k^3} + \frac{1}{2} 10^{-2}$$

Att kunna använda

$$f(1) + \int_1^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x) dx$$

$n \rightarrow \infty$

Bra öv Undersök om

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}(k+1)} \leq \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

Lösning $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} \quad x \geq 1$

är avtagande, $f'(x) \leq 0$

Val

$$\sum_{k=1}^n f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x) dx$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}(k+1)} \leq f(1) + \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}(k+1)} \leq \underbrace{f(1)}_{\frac{1}{\sqrt{1}(1+1)} = \frac{1}{2}} + \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_1^h \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx$$

$$\int_1^h \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \\ 2t dt = dx \\ x: 1 \longrightarrow h \\ t: 1 \longrightarrow \sqrt{h} \end{array} \right]$$

$$= \int_1^{\sqrt{h}} \frac{2t dt}{t(t^2+1)} = \int_1^{\sqrt{h}} \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$= 2 \left[\arctan(t) \right]_1^{\sqrt{h}} =$$

$$= 2 \left(\arctan(\sqrt{h}) - \arctan 1 \right)$$

$$\xrightarrow{h \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}(k+1)} \leq \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi+1}{2}$$

V.S. ✓