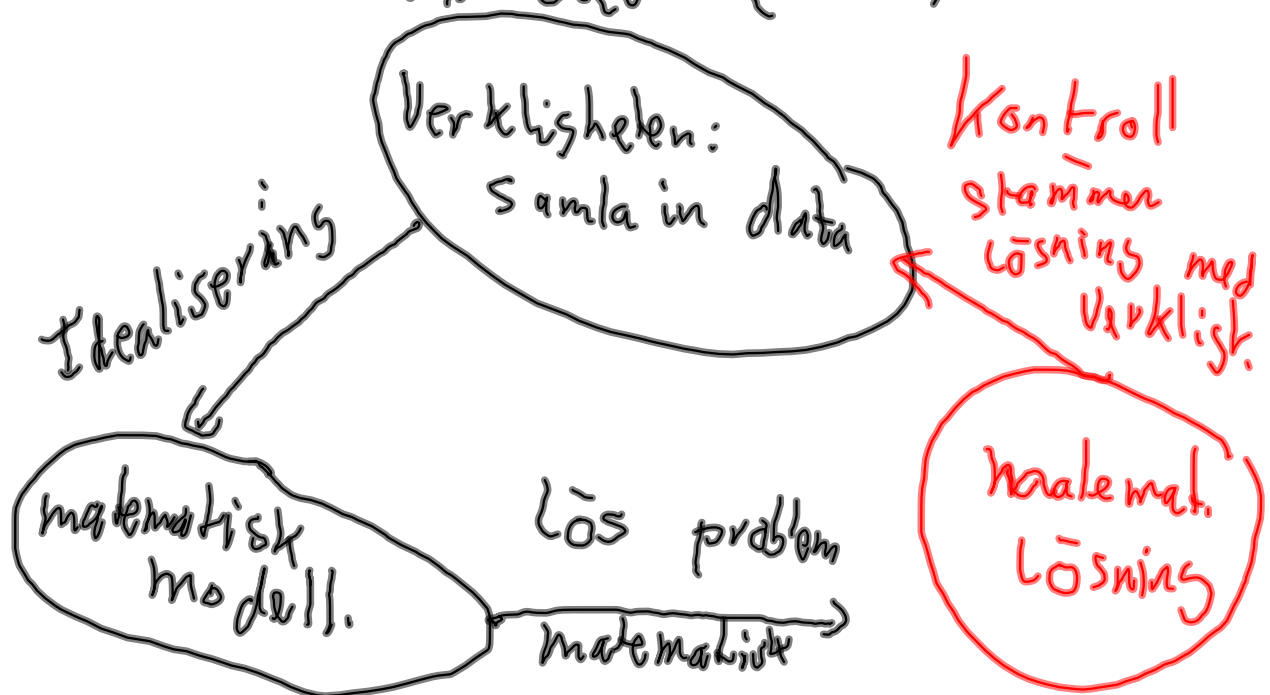


Förel 13

Om diff. ekv. med konstanta
Koeff.

1. Var för diff. ekv. (D.E)



Ex 1 $y(0)=0$, $y'(0)=0$... - beräkna
den tid det
tar en kula
att nå marken



Newtons andra lag

$$\begin{cases} m y''(t) = mg \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \text{ begynnelse värdena}$$

matematiskt modell

$$\begin{cases} y''(t) = g \text{ (m/s}^2\text{)} \quad (g \approx 9,81) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

• Lös problem

$$y'(t) = gt + A$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$y'(t) = gt$$

$$y(t) = g \frac{t^2}{2} + Bt$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

Den matematiska lösningen är

$$y(t) = \frac{1}{2} g t^2$$

sträckan längd = l

$$l = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \pm \sqrt{\frac{2l}{g}}$$

$$\therefore t = \sqrt{\frac{2l}{g}} \quad (\otimes)$$

Detta stämmer inte med verkligheten

(*) innebär en kula av 1 kg
och en fjärdedel tar lika mycket

tiden att nå marken ??

Vi glömde luftmotstånd.

Våra modeller består av två delar

D. E

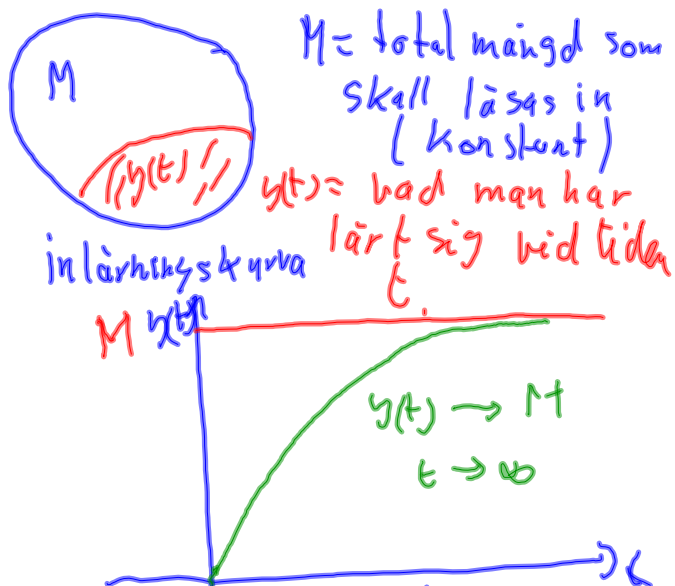
dynamiska lagar

(t ex Newtons andra lag)

begynnelsevillkor.

mätningar

EX2 Inlämning D. E



Inlärnings hastigheten $= \frac{dy}{dt}$ = proportion
mot det återstår att läsa in
 $\approx$ konstant ($M - y(t)$)
d.ä.
 $\frac{dy}{dt} = k (M - y(t))$ o $y(t) \leq M$

Vi löser D.E med separation
av variablerna y och t

$$\frac{dy}{M-y} = k dt$$

Integration ger

$$\int \frac{1}{M-y} dy = \int k dt$$

$$-\ln(M-y) = kt + C$$

$$\Rightarrow \ln(M-y) = -kt - C$$

$$\Rightarrow M-y = e^{-kt-C} = e^{-k} e^{-C}$$

$$\Rightarrow M-y = A e^{-kt}$$

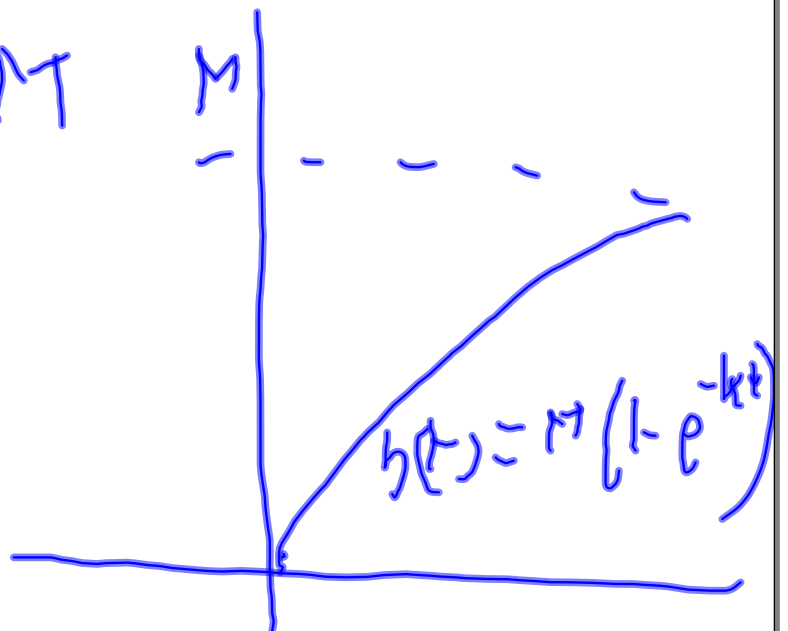
$$t=0 \Rightarrow y(0)=0 \Rightarrow M-0 = A e^{-k \cdot 0}$$

$$\Rightarrow A = M$$

$$M-y = M e^{-kt} \Rightarrow \text{lös ut } y(t)$$

$$y(t) = M(1 - e^{-kt})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = M$$



Def en diff. ekv med konstant

Koeff är på formen

$$\text{D.E} \begin{cases} y''(t) + a y'(t) + b y(t) = f(t) \\ a y'(t) + b y(t) = g(t) \end{cases}$$

a och b är konstanter.

D.E. säger vara homogent om
 $H \subset f(t) \text{ (s(t))}$ är noll.

annars säges den vara inhomogent.

Den allmänna lösning till D.E

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

där $y_h(t)$ löser $y_h''(t) + a y_h'(t) + b y_h(t) = 0$

$y_p(t)$ är en sk part. lösning till
den inhomogena D.E

Dvs

$$y_p''(t) + a y_p'(t) + b y_p(t) = f(t)$$

Problem 1 Hur löser man den homogena delen dvs Hur finner man $y_h(t)$:

$$y_h''(t) + ay_h'(t) + by_h(t) = 0 \quad (H)$$

där a, b är konstanter.

Lösning Ansätt $y_h(t) = e^{rt}$
 $y_h'(t) = re^{rt}, \quad y_h''(t) = r^2e^{rt}$

insätt i (H) och får
 $r^2e^{rt} + are^{rt} + be^{rt} = 0$

$$\underbrace{e^{rt}}_{\neq 0} (r^2 + ar + b) = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + ar + b = 0$$

Def 1

$$r^2 + ar + b = 0 \quad \text{som fås}$$

Via ansatsen $y_h(t) = e^{rt}$

$$i \quad y_h''(t) + ay_h'(t) + by_h(t) = 0$$

kallas för den karakteristiska
ekvationen (k.e) till (H)

Def 2 $\begin{cases} e^{i\beta} = \cos \beta + i \sin \beta \\ e^{-i\beta} = \cos \beta - i \sin \beta \end{cases}$ De Moivre's formell.

$\Rightarrow \begin{cases} \cos \beta = \frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2} \\ \sin \beta = \frac{e^{+i\beta} - e^{-i\beta}}{2i} \end{cases}$

$e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$

Resultat Den homogena ekvationen

$$y_n''(t) + ay_n'(t) + by_n(t) = 0$$

Med (k.E): $r^2 + ar + b = 0$
 Har följande Reella lösningar
 som beror på rötterna r_1, r_2
 av (k.E).

Fall 1 om $r_1 \neq r_2$, r_1, r_2 Reella

$$y_h(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} \quad A, B \text{ konst}$$

Fall 2 om $r_1 = r_2 = r$ (reellt)

$$y_h(t) = (A + Bt) e^{rt}, \quad A, B \text{ konst}$$

Fall 3 om $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta = \bar{r}_1$

$$y_h(t) = e^{\alpha t} (A \cos \beta t + B \sin \beta t)$$

!!! reellt !!!

Ex3 Lös $y'' + y' - 6y = 0$

(k.E) $r^2 + r - 6 = 0$

$\Rightarrow r = -3, 2$

$y_h(t) = A e^{-3t} + B e^{2t}$

Ex4: Lös $y'' + 2y' + y = 0$

(k.E)

$r^2 + 2r + 1 = 0$

$(r+1)^2 = 0 \Rightarrow r = -1, -1$

$y_h(t) = (A + Bt) e^{-t}$, A, B konst.

Ex5 Lös $\begin{cases} y'' - 4y' + 13y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

Lösning (k.E) $r^2 - 4r + 13 = 0$

$r^2 - 4r + 13 = (r-2)^2 - 2^2 + 13 = 0$

$-(r-2)^2 + 9 = 0 \Rightarrow (r-2)^2 = -9 = (3i)^2$
($i^2 = -1$)

$r = 2 \pm 3i = \alpha \pm i\beta$

$y_h(t) = e^{\alpha t} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t))$
 $= e^{2t} (A \cos(3t) + B \sin(3t))$

Sök A och B m.h.a
 $y(0) = 3, y'(0) = 0$

Vi använder först $y(0) = 3$

$y(0) = e^{2 \cdot 0} (A \cos(3 \cdot 0) + B \sin(3 \cdot 0))$
 $= 3 = \underbrace{e^0}_{=1} (\underbrace{A \cos(0)}_{=1} + \underbrace{B \sin(0)}_{=0})$

$y(0) = 3 = A$

$y(t) = e^{2t} (3 \cos(3t) + B \sin(3t))$

Finn B via $y'(0) = 0$

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{d}{dt} \left(e^{2t} (3 \cos(3t) + B \sin(3t)) \right) \\ &= 2 e^{2t} (3 \cos(3t) + B \sin(3t)) \\ &\quad + e^{2t} \underbrace{\frac{d}{dt} (3 \cos(3t) + B \sin(3t))}_{3 \cdot 3 (-\sin(3t)) + 3B \cos(3t)} \end{aligned}$$

$$y'(t) = 2 e^{2t} (3 \cos(3t) + B \sin(3t)) + e^{2t} (-9 \sin(3t) + 3B \cos(3t))$$

$$\begin{aligned} y'(0) &= 2 (3 + 0) + 1 (-9 \cdot 0 + 3B) \\ &= 6 + 3B = 0 \\ &\Rightarrow B = -\frac{6}{3} = -2. \end{aligned}$$

Svar den lösning till

$$\begin{cases} y''(t) - 4y'(t) + 13y = 0 \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

ges av

$$y(t) = e^{2t} (3 \cos(3t) - 2 \sin(3t))$$

Ex 6 Løs $\begin{cases} y'(t) + K y(t) = 0 \\ y(0) = m \end{cases}$

(Ex 6 i kursboken)

Løsning, (k.E): $r + k = 0$
 $\Rightarrow r = -K$

$$y_h(t) = A e^{-kt}$$

Vi finner konstanten A
 m.h.a. $y(0) = m$

$$y_h(0) = A = m$$

Svar $y_h(t) = m e^{-kt}$

EX 7. En sten kastas rakt upp
i luften med en hastighet
 36 km/h . Antag att
Luftmotståndet är försumma-
bart.
Hur högt når stenen?

Svar c.a 5 m