

Förel 14 Metoden att finna en partikulär lösning till $y'' + ay' + by = f$

Rep Den allm lösning. till

$$y'' + ay' + by = f \quad \text{ges en}$$

$$y = y_h + y_p$$

där y_h är lösning till den homogena delen dvs $y_h'' + ay_h' + by_h = 0$

som löses m h a (k. E): $r^2 + ar + b = 0$

Medan y_p är sk en partikulär lösning

Till den inhomogena (D. E)

$$y_p'' + ay_p' + by_p = f$$

Fall 1

$f(t) = P_n(t)$ ett polynom av grad n
Ansats som beror av a och b

$b \neq 0$	$y_p(t) = Q_n(t)$ polynom av samma grad
$b = 0, a \neq 0$	$y_p(t) = t Q_n(t)$
$a = 0, b = 0$ $y_p''(t) = f(t)$	$y_p(t) = t^2 Q_n(t)$ eller integrera 2 gg $y_p'(t) = F(t)$

Ex 1 Lös $y'' - 4y' + 5y = 15t + 8$ (1)

Lösning Vi söker den allm. lösningen
till (1) dvs $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

• Sök $y_h(t)$:

Via den (k.E): $r^2 - 4r + 5 = 0$

$\Rightarrow (r-2)^2 - 4 + 5 = 0 \Leftrightarrow (r-2)^2 + 1 = 0$

$\Rightarrow r-2 = \pm \sqrt{-1} = \pm \sqrt{i^2} = \pm i$

$r = 2 \pm i = \alpha \pm i\beta, \alpha=2, \beta=1$

$y_h(t) = e^{\alpha t} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t))$

$= [e^{2t}, \beta=1] =$

$= e^{2t} (A \cos t + B \sin t)$

• Finns en partikulär lösning y_p .

dvs $y_p''(t) - 4y_p'(t) + 5y_p(t) = 15t + 8$ (2)

Ansatsen blir

$y_p(t) = Q_1(t) = \alpha t + \beta$

$y_p'(t) = \alpha, y_p'' = 0$ i (2)

för att finna konstanterna α, β .

$0 - 4\alpha + 5(\alpha t + \beta) = 15t + 8$

$\Rightarrow 5\alpha t + 5\beta - 4\alpha = 15t + 8$ (3)

Identifiering dvs (3) är sant

Om $\begin{cases} 5\alpha = 15 \\ 5\beta - 4\alpha = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 4 \end{cases}$

Del svar $y_p(t) = \alpha t + \beta = 3t + 4$

Svar $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

$= e^{2t} (A \cos t + B \sin t) + 3t + 4$

Fall II $f(t) = P_n(t) e^{\alpha t}$

Vi gör en substitution

$$y_p(t) = z_p(t) e^{\alpha t}$$

in i $y_p'' + ay_p' + by_p(t) = P_n e^{\alpha t}$

Som övergår till att söka

$$z_p(t) \text{ i } z_p''(t) + A z_p'(t) + B z_p(t) = P_n$$

GOTO Fall 1

Ex 2 Lös $y'' - 4y' + 5y = t e^t$ (1)

ett Polynom
av grad 1

Lösning $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

Den homogena delen finns i Ex 1
dvs $y_h(t) = e^{2t}(A \cos t + B \sin t)$

• Finns $y_p(t)$

• Sätt $y_p(t) = z_p(t) e^t$

$y_p' = z_p' e^t + z_p e^t = e^t(z_p' + z_p)$

$y_p'' = e^t(z_p' + z_p) + e^t(z_p'' + z_p')$

$= e^t(z_p'' + 2z_p' + z_p)$

in i $y_p'' - 4y_p' + 5y_p = t e^t$

~~$e^t(z_p'' + 2z_p' + z_p) - 4e^t(z_p' + z_p) + 5e^t z_p = t e^t$~~

$\Rightarrow z_p'' + 2z_p' + z_p - 4(z_p' + z_p) + 5z_p = t$

$z_p'' + 2z_p' + z_p - 4z_p' - 4z_p + 5z_p = t$

$\Rightarrow z_p'' - 2z_p' + \underbrace{2}_{b=2} z_p = \underbrace{t}_{\text{polynom av grad 1}}$ (2)

Ansatsen blir

$z_p = \varphi_1(t) = \alpha t + \beta$

$z_p' = \alpha, z_p'' = 0$ in i (2)

$\Rightarrow 0 - 2\alpha + 2(\alpha t + \beta) = t$ (4)

Identifiering av (4) å sätter

om $\begin{cases} 2\alpha = 1 \\ 2\beta - 2\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{1}{2}$

$z_p = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$

man observera att vi söker

$y_p(t) = z_p(t) e^t = \left(\frac{t+1}{2}\right) e^t$

Svar $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$
 $= e^{2t} (A \cos t + B \sin t) +$
 $\frac{1}{2} (t+1) e^t.$

Fall 3 $y'' + ay' + by = A \cos \beta t (A \sin \beta t)$

Här $f(t) = A \cos \beta t (A \sin \beta t)$

Den part. lösning $y_p(t)$ beror på HL.

Fall 1 om iβ är en lösning till
 $(kE) \quad r^2 + ar + b = 0$

dvs om HL är en lösning till den homogena delen
 Så antar vi

$$y_p(t) = t (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$$

Vi har sk Resonans fall
 som innebär

$$|y(t)| = |y_h(t) + y_p(t)| \rightarrow \infty \quad t \rightarrow \infty$$

annars dvs om iβ är inte en rot till $(kE) \quad r^2 + ar + b = 0$
 dvs HL är inte en lösning till den homogena delen

Antar vi

$$y_p(t) = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t$$

$$|y(t)| = |y_h(t) + y_p(t)| \leq \text{konstant} \quad \text{för alla } t$$

Ex 3 utan resonans

Lös $y'' + y = \sin 2t$

Lösning $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

• $y_h(t)$ ges mha KE

$$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$$
$$= \alpha \pm i\beta, \alpha = 0, \beta = 1$$

$$y_h(t) = e^{\alpha t} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t))$$
$$= [\alpha = 0, \beta = 1]$$
$$= A \cos t + B \sin t$$

• Sök $y_p(t)$:

Här $= \sin 2t$ som
löser inte $y'' + y = 0$

Dvs finns inte med.

$$y_h(t) = A \cos t + B \sin t$$

Ej Resonans

Ansatsen $y_p(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$

pga $F(t) = \sin 2t$

$$y_p = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$$

$$y_p' = -2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t$$

$$y_p'' = -4C_1 \cos 2t - 4C_2 \sin 2t$$

Ins i $y_p'' + y_p = \sin 2t$

$$-4C_1 \cos(2t) - 4C_2 \sin(2t) + C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) = \sin(2t)$$

$$\cos(2t) (-4C_1 + C_1) + \sin(2t) (-4C_2 + C_2) = \sin 2t$$
$$\cos(2t) (-3C_1) + \sin(2t) (-3C_2) = \sin 2t$$

$$-3C_1 \cos 2t - 3C_2 \sin 2t = \sin 2t$$

$\Rightarrow 0 \cdot \cos(2t) +$
 $\quad \quad \quad 1 \cdot \sin(2t)$

Identifiering

$$\begin{aligned} \rightarrow -3C_1 &= 0 \Rightarrow C_1 \\ -3C_2 &= 1 \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Som skall sättas in i

$$C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$$

Del svar

$$\begin{aligned} y_p(t) &= C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t \\ &= -\frac{1}{3} \sin 2t \end{aligned}$$

Svar $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

$$= A \cos t + B \sin t - \frac{1}{3} \sin(2t).$$

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| A \cos t + B \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t \right| \\ &\leq \underbrace{|A| |\cos t|}_{\leq 1} + \underbrace{|B| |\sin t|}_{\leq 1} + \underbrace{\frac{1}{3} |\sin 2t|}_{\leq 1} \\ &\leq \underbrace{|A| + |B| + \frac{1}{3}}_{\text{Konstant}} \end{aligned}$$

Ex 5 på Resonans

$$\text{lös } y'' + y = \cos t$$

$$\text{Lösning } y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$$y_h(t) = A \cos t + B \sin t$$

från föregående EX

• Finn $y_p(t)$.

Vi observerar att $HL = \cos t$
som är en lösning till
den homogena delen.

Dvs Vi har fallet av resonans

Därför ansätter vi

$$y_p(t) = t(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$$

$$y'_p(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + t(-C_1 \sin t + C_2 \cos t)$$

$$y''_p(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + 1 \cdot (-C_1 \sin t + C_2 \cos t) + t(-C_1 \cos t - C_2 \sin t)$$

$$\text{in i } y'' + y = \cos t$$

$$\cancel{t(-C_1 \cos t - C_2 \sin t)} + 2(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) + \cancel{t(C_1 \cos t + C_2 \sin t)} = \cos t$$

$$2(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) = \cos t$$

$$= 1 \cdot \cos t + 0 \cdot \sin t$$

Identifiera!

$$\Rightarrow \begin{cases} -2C_1 = 0 \\ 2C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 1/2 \end{cases}$$

som skall sättas in

$$y_p(t) = t(C_1 \cos t + C_2 \sin t) \\ = \underline{\underline{\frac{1}{2} \sin t}}$$

Svar Den allmänna lösningen
ges av

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$$y(t) = A \cos t + B \sin t + \frac{t}{2} \sin t$$

$$|y(t)| = \left| A \cos t + B \sin t + \frac{t}{2} \sin t \right|$$

$$\leq \underbrace{|A| |\cos t|}_{\leq 1} + \underbrace{|B| |\sin t|}_{\leq 1} + \frac{t}{2} \underbrace{|\sin t|}_{\leq 1}$$

$$\leq A + B + \frac{t}{2} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$$