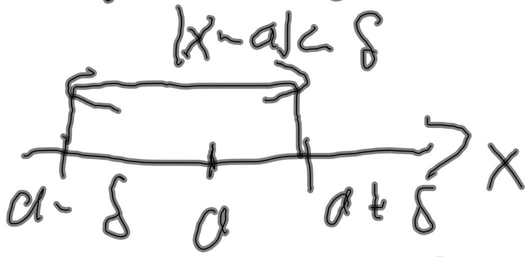
Förel 16. Taylors utveckling och dess tillämpningar.

<u>Problem</u> Given en funktion f definierad i en omgivning av $x=a$



(1) Kan vi approximera f med ett polynom av grad n

$$P_n(x) = a_0 + (x-a)a_1 + \cdots + (x-a)^n a_n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$$

(2) Hur bra är approximationen dvs

$$r_n(x) = |f(x) - P_n(x)|$$

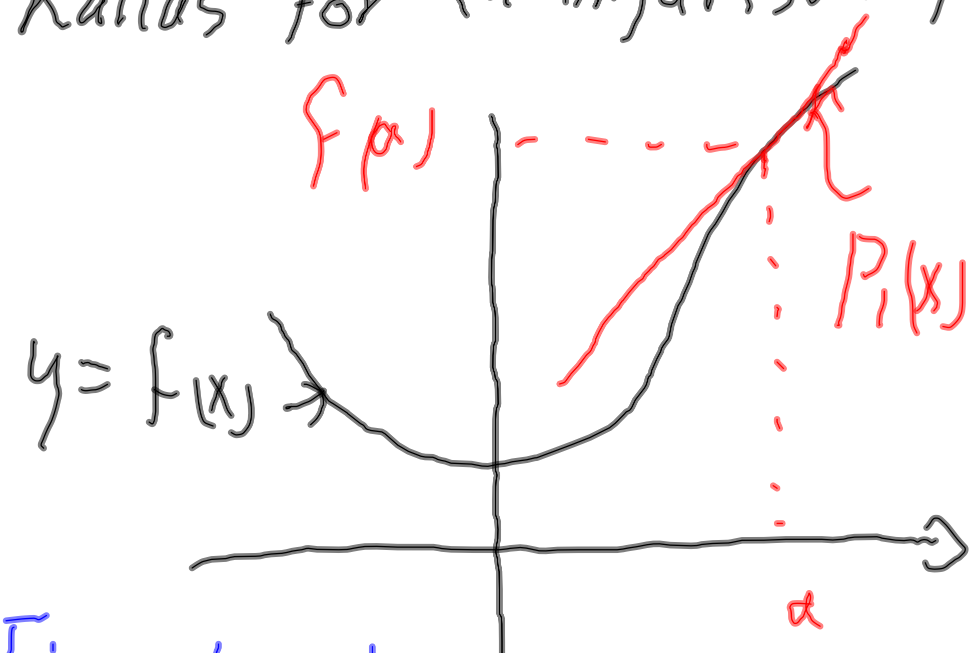
restterm = felet

Hur litet (stort) är felet

Ex 1 Tangenten till f i $(a, f(a))$ ges av

$$P_1(x) = f(a) + (x-a) f'(a)$$

kallas för en linjarisering



Finn ett polynom av grad 1 som approximera

$$f(x) = \sqrt{3+x^2}$$

i $a=1$ dvs kring punkten $(a, f(a)) = (1, f(1))$

Lösning

$P_1(x) = f(1) + (x-1)f'(1)$

är tangenten kring punkten $(1, f(1))$

$f(x) = \sqrt{3+x^2} \Rightarrow f(1) = 2$

$f'(x) = \frac{d}{dx}(3+x^2)^{1/2} = \frac{1}{2}(3+x^2)^{\frac{1}{2}-1}$

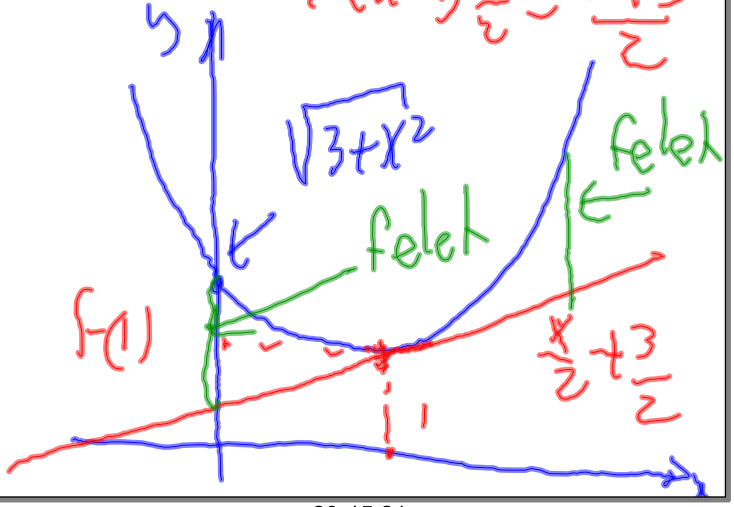
$\frac{d}{dx}(3+x^2)$ inre deriv

$= \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{3+x^2}}\cancel{2}x$

$f'(1) = \frac{1}{\sqrt{3+1}} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

$P_1(x) = f(1) + (x-1)f'(1)$

$= 2 + (x-1)\cdot\frac{1}{2} = \frac{x+3}{2}$



nov 29-15:21

Taylors sats

Låt f vara "snäll"
så kan f skrivas

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + r_n(x)$$

$$\boxed{p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}$$

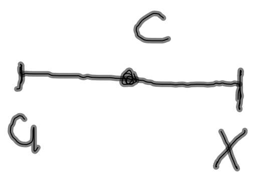
Taylors polynom av
grad n.

$$r_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

felet som man gör
när man ersätter
f med p_n

Hur man skriver Resttermen eller felet?

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$



$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \right|$$

$$\leq \frac{M}{(n+1)!}|(x-a)|^{n+1}$$

$$M = \max_{a \leq c \leq x} |f^{(n+1)}(c)|$$

$$|r_n(x)| \leq B\,|x-a|^{n+1}$$

$$B = \frac{M}{(n+1)!}$$

Definition av ORDO

$$|r_n(x)| \leq B\,|x-a|^{n+1}$$

skrives som

$$r_n(x) = O\left((x-a)^{n+1}\right)$$
$$x \to a$$

uttrycket

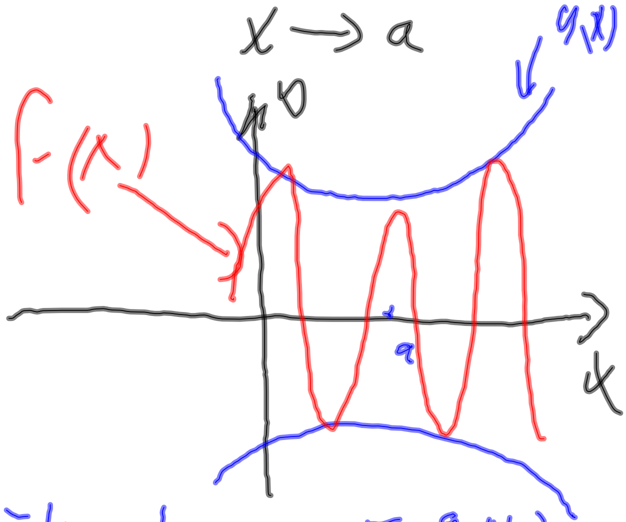
$$f(x) = O\left(g(x) \right)$$

då $x \to a$

$\Longleftrightarrow$

$$|f(x)| \le B\, |g(x)|$$

$x \to a$



Räknelagar – g(x)
för ORDO då $x \to a$

① $O(x-a)^n \cdot O(x-a)^m$
$= O(x-a)^{n+m}$

② $O(x-a)^n \pm O(x-a)^m$
$= O(x-a)^{\min(n,m)}$

Ex $O(x-1)^3 \cdot O(x-1)^2 =$

$= O(x-1)^{3+2} =$

$O(x-1)^5$

$O(x-1)^2 \pm O(x-1)^3$

$= O(x-1)^2$

Taylors serier

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

nov 29-15:42

Ex $f(x) = x\cos x + 1$

Finn Taylorpolynomet av grad 3 kring $a = \pi/2$

Lösning Vi söker

$$P_3(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2 \frac{f^{(2)}(a)}{2!} + (x-a)^3 \frac{f^{(3)}(a)}{3!}$$

Här $f(x) = x\cos x + 1$

$a = \pi/2$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \underbrace{\cos\left(\pi/2\right)}_{=0} + 1 = 1$$

$$f'(x) = (x\cos x + 1)' =$$

$$= (x\cos x)' = 1 \cdot \cos x + x(-\sin x)$$

$$= \cos x - x\sin x$$

$$f'(\pi/2) = \underbrace{\cos(\pi/2)}_{=0} - \frac{\pi}{2}\underbrace{\sin(\pi/2)}_{=1}$$

$$f'(\pi/2) = -\pi/2$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\cos x - x\sin x\right)$$

$$= -\sin x - \sin x - x \underbrace{\frac{d}{dx}\sin x}_{\cos x}$$

$$= -2\sin x - x\,\cancel{\sin}\,x$$

$$= -2\sin x - x\cos x$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} - \frac{\pi}{2}\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$$

$$f'''(x) = \frac{d}{dx} f''(x) = \frac{d}{dx}\left(-2\sin x - x\cos x\right)$$

$$= -2\cos x - \cos x - x(-\sin x)$$

$$= -3\cos x + x\sin x$$

$$f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

nov 29-16:10

Svar:

$$P_3(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(x-\frac{\pi}{2}\right) f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{f''(\pi/2)}{2} + \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3 \frac{f^{(3)}(\pi/2)}{6}$$

$$= 1 + \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2(-2) + \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3}{6}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Ex Använd linjarisering för $\sqrt{x}$ kring $a=25$ för att finna ett approxima-tivt värde för $\sqrt{26}$ och uppskatta felet

Lösning **steg 1**

Förklara vad skall göras

Vi söker att approximera $\sqrt{x}$ kring $a=25$ med ett Taylorpolynom av grad 1 kring $a=25$ och sedan skall vi uppskatta felet.

steg 2 Taylors sats ger att

$$f(x) = \underbrace{f(a) + (x-a)f'(a)}_{\text{Taylorpolynom av grad 1}} + r(x)$$

där resttermen (felet)

$$r(x) = \frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x-a)^2$$

$a < c < x$

Lagranges r

steg 3 utför

$f(x) = \sqrt{x}$, $a = 25$

$f(25) = \sqrt{25} = 5$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(25) = \dfrac{1}{2\sqrt{25}}$

$= \dfrac{1}{10}$

$P_1(x) = f(25) + (x-25)\, f'(25)$

$= 5 + (x-25)\dfrac{1}{10}$

Steg 4. ett approximativt värde $\sqrt{26}$

$P_1(26) = 5 + (26-25)\dfrac{1}{10}$

$= 5 + 0.1$

$\sqrt{26} \approx 5.1$

steg 5 uppskatta felet:

$$\sqrt{x} = p_1(x) + \text{felet}$$

$$= p_1(x) + \frac{f''(c)}{2}(x-26)^2$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

$$|\text{felet}| = \left| \frac{f''(c)}{2}(x-26)^2 \right|$$

$$|\text{felet}| \le \frac{1}{2} |f''(c)| \, |x-26|^2$$

$$|\text{Felet}| \leq \max_{25 \leq c \leq 26} \left| \frac{f''(c)}{2} (x-26)^2 \right|$$

$$\leq \max_{25 \leq c \leq 26} f''(c) \cdot \frac{1}{2} \underbrace{(25-26)^2}_{=1}$$

$$\leq \frac{1}{2} \max_{25 \leq c \leq 26} |f''(c)|$$

$$\max_{25 \leq c \leq 26} |f''(c)| = \max_{25 \leq c \leq 26} \left| -\frac{1}{4x\sqrt{x}} \right|$$

$$= \frac{1}{4} \max_{25 \leq c \leq 26} \frac{1}{\cancel{x}\sqrt{\cancel{x}}}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{1}{25\sqrt{25}} = \frac{1}{4 \cdot 25 \cdot 5}$$

$$= \frac{1}{500}$$

$$|\text{Felet}| \leq \frac{1}{2} \max_{25 \leq c \leq 26} \frac{1}{c\sqrt{c}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{500} \approx 10^{-3}$$

$$\boxed{\sqrt{26} = 5{,}1 \pm 10^{-3}}$$

nov 29-16:44