Förel 17 Mac Laurins utvecklingar = Taylors utvecklingar kring $a = 0$

För "snälla" funktioner gäller

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Lagranges form

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \le \underbrace{\left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \right|}_{\le M} \left| x^{n+1} \right|$$

$|R_n(x)| \le M |x|^{n+1}$ som skrives på ORDO form

$$R_n(x) = O(x^{n+1}) \quad x \to 0$$

Kända Maclaurins utveckling

$$f(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

$$f^{(n)}(0) = 1, \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + O(x^{n+1})$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1}), \quad x \to 0 \ (*)$$

$$e^{-x} \left[\begin{matrix} x \to -x \\ \text{i } (*) \end{matrix}\right] =$$

$$= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \dots \frac{(-1)^n x^n}{n!} + O(x^{n+1}), \quad x \to 0$$

$$e^{x^2} = \left[\begin{matrix} x \to x^2 \\ \text{i } (*) \end{matrix}\right] =$$

$$= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!} + O(x^{2n+2}), \quad x \to 0$$

nov 30-07:51

2. $\sin x$

$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$

$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$,

$f^{(3)}(0) = -1$, $f^{(4)}(0)$, ...

$f(x) = \sin x$, $f(-x) = -\sin x$

udda fkn.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + O(x^{2n+1})$$

$x \to 0$

endast udda termer i Maclaurins polynom

nov 30-07:52

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$

$x \to 0$

endast jämna termer i Maclaurins polynom ty $\cos(x)$ är en jämn fkn dvs $f(x) = \cos x$

$f(-x) = \cos x$

4. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + O(x^{n+1})$

$x \to 0$ (4)

$\frac{1}{1+x} = \left[\begin{matrix} x \to -x \\ \text{i } (4) \end{matrix} \right] =$

$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots + (-x)^n + O(x^{n+1})$, $x \to 0$

nov 30-08:22

$\underline{5}$ $\ln(1+x) = ?$ . ..

$$\frac{d}{dx}\ln(1+x) = \frac{1}{1+x} =$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-x)^n + O(x^{n+1}),\ x \to 0$$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt =$$

$$\int_0^x \left(1 - t + t^2 - t^3 + \dots (-1)^n t^n + O(t^{n+1})\right) dt,\ t \to 0$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
$$O(x^{n+2}),\ x \to 0$$

nov 30-08:26

Ex Använd Maclaurins utveckling av $\sin x$ för att beräkna $\sin(0.1)$ med ett fel $< 5 \cdot 10^{-5}$

Lösning Här behövs

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

för att bestämma hur många termer skall vi ta så kollar på termerna

$$\left|\frac{x^3}{3!}\right|, \left|\frac{x^5}{5!}\right|, \left|\frac{x^7}{7!}\right|$$

och kolla genom insättning av $x = 0.1 = 10^{-1}$ har vi den önskade felet $< 5 \cdot 10^{-5}$.

Titta på

$$\left|\frac{x^5}{5!}\right| = \left[x = 10^{-1}\right] =$$

$$\frac{10^{-5}}{5!} < 5 \cdot 10^{-5}$$

Titta på

$$\left|\frac{x^3}{3!}\right| = \left[x = 10^{-1}\right]$$

$$= \frac{10^{-3}}{3!}$$ som

är större än $5 \cdot 10^{-5}$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} \pm 5 \cdot 10^{-5}$$

$$\sin(0.1) = 0.1 - \frac{10^{-3}}{6} \pm 5 \cdot 10^{-5}$$

$$= 0.1 - \frac{(0.1)^3}{6} \pm 5 \cdot 10^{-5}$$

$$= 0.09833 \pm 5 \cdot 10^{-5}$$

nov 30-08:39

Ex uppskatta det maximala felet som görs om i $|x| \leq 1/2$ $\left(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\right)$ ersätter $f(x) = \sqrt{1+x}$ med polynomet

$$p(x) = 1 + \frac{x}{2}$$

Lösning $p(x) = 1 + \frac{x}{2}$ är av grad 1. Vi kollar om det är en Maclaurinspolynom av grad 1.

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + r(x) \quad (1)$$

Med $f(x) = \sqrt{1+x}$ så fås $f(0) = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, \quad f'(0) = \frac{1}{2}$$

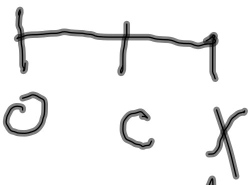
Maclaurinspolynom av grad 1 är $f(0) + x f'(0)$

nov 30-09:04

$= 1 + \frac{x}{2} =$ det givna polynomet

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + r(x)$$

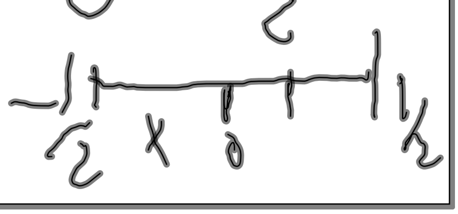
$$r(x) = \frac{f^{(2)}(c)}{2!} x^2$$



$$\left|\sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2}\right)\right| = |r(x)|$$

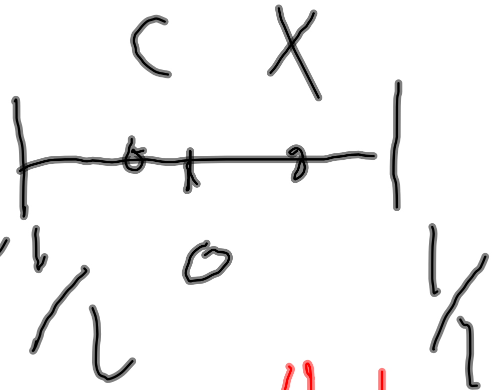
$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4(x+1)^{3/2}}$$

$$r(x) = -\frac{1}{4(c+1)^{3/2}} \frac{1}{2} (x-0)^2$$



$$r(x) = -\frac{x^2}{8(1+c)^{3/2}}$$

$$|r(x)| = \frac{x^2}{8(1+c)^{3/2}}$$



Vi använde

$$\max_{a \le t \le b} \left| \frac{h(t)}{g(t)} \right| \le \frac{\max_{a \le t \le b} |h(t)|}{\min_{a \le t \le b} |g(t)|}$$

$$\max_{-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}} x^2 = \left(\pm\frac{1}{2}\right)^2 = 1/4$$

$$g(c) = 8\left(\sqrt{1+c}\right)(1+c)$$

$$= 8(1+c)^{3/2}$$

$$\min_{-\frac{1}{2} \le c \le 1/2} |g(c)| = \min_{-\frac{1}{2} \le c \le 1/2} 8(1+c)^{3/2}$$

$$= 8\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3/2} = 8\left(1-1/2\right)\sqrt{1-1/2}$$

$$= 8 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{8}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

nov 30-09:16

$$|r(x)| \le \max_{-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}} \frac{x^2}{8\left(\sqrt{1+x}\right)(1+x)}$$

$$= \frac{1/4}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{8\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{16} \le 0.1$$

Svar

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} \pm 0.1 \qquad -1/2 \le x \le 1/2}$$

$x = 1/4$ som ligger i $|x| \le 1/2$

$$\sqrt{1+\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1/4}{2} \pm 0.1$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{8} \pm 0.1$$

$$\Rightarrow \sqrt{5} = 2\left(1 + \frac{1}{8} \pm 0.1\right)$$

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4} \pm 0.\cancel{1}2$$

$$= 2 + 0.25 \pm 0.\cancel{1}2$$

$$\boxed{\sqrt{5} = 2.25 \pm 0.\cancel{1}2}$$

nov 30-09:20

Ex ange ett närmev.

$\int_0^{1/2} e^{-t^2}\,dt$ med

ett fel $< 5\cdot 10^{-4}$

Lösning

En primitiv fkn till e^{-t^2} kan ej uttryckas med element. fkna

$\int e^{-t^2}\,dt \neq \frac{e^{-t^2}}{-2t}$ Fel

Metod bland många andra

$e^u = 1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\frac{u^4}{4!}+\ldots$

$e^{-t^2} = \left[u=-t^2\right] = 1-t^2+\frac{(-t^2)^2}{2} + \frac{(-t^2)^3}{3!}+\frac{(-t^2)^4}{4!}+\ldots$

$= 1-t^2+\frac{t^4}{2}-\frac{t^6}{3!}+\frac{t^8}{4!}+\ldots$

nov 30-09:25

$$\int_0^{1/2} e^{-t^2}\,dt =$$

$$\int_0^{1/2}\left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \frac{t^{10}}{5!} + \ldots\right) dt$$

$$\left[t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{10} - \frac{t^7}{7\cdot 3!} + \frac{t^9}{9\cdot 4!} - \frac{t^{11}}{5!\,11} + \ldots\right]_0^{1/2}$$

Vill ha felet $< 5\cdot 10^{-3}$

Kolla vilka av

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{10}, \quad \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{7\cdot 6}, \quad \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^9}{9\cdot 4!}$$

är först $< 5\cdot 10^{-3}$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{10} = \frac{1}{2^5\cdot 10} = \frac{1}{32\cdot 10} = \frac{1}{320}$$

inte $< 5\cdot 10^{-\cancel{3}4}$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{7\cdot 6} = \frac{1}{2^7\cdot 7\cdot 6} = \frac{1}{128\cdot 7\cdot 6}$$

$< 5\cdot 10^{-\cancel{3}4}$

$$\int_0^{1/2} e^{-t^2}\,dt = \left[t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{10}\right]_0^{1/2}$$

$\pm\, 5\cdot 10^{-\cancel{3}4}$

$$\frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{10} \pm 5\cdot 10^{-3}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3\cdot 3} + \frac{1}{320} \pm 5\,10^{-3}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{320} \pm$$

nov 30-09:36

Svar

$$\int_0^{1/2} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{320} \pm 5\cdot 10^{-4}$$

skall räknas ut