

Förel 18 Beräkning av gränsvärden mha

- Taylors sats
- L'Hôpital's regel.

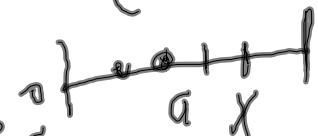
Repetition av Taylors sats

Om $f^{(k)}(x)$, $k=0, 1, 2, \dots, n+1$
är kontin på a 
så gäller $|x-a| < \delta$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k +$$

Taylors polynom
av grad n
+ Rest term

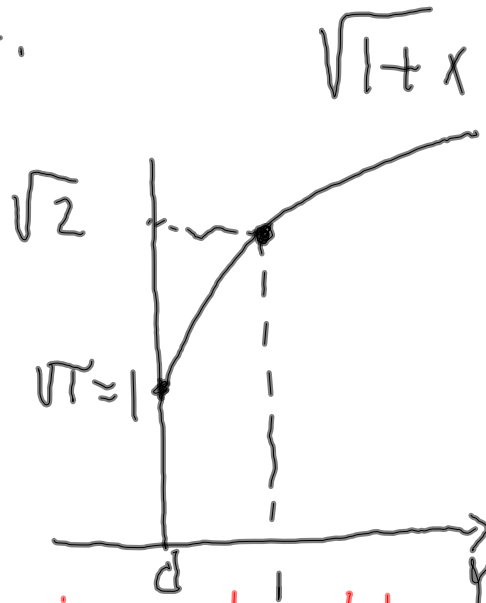
$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

om $a=0$ så 

vi att vi har
Maclaurinsutr.

EX Använd MacLaurins
utveckling av ^{grad 3} $f(x) = \sqrt{1+x}$
för att finna ett
approximativt värde till
 $\sqrt{2}$. Hur stor är
felet.

Lösning



MacLaurins utveckling
av $f(x) = \sqrt{1+x}$ till
grad 3 ges av

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2 f''(0)}{2} + \frac{x^3 f^{(3)}(0)}{3!} + R(x)$$

$$R(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!} (x-0)^4$$

$\forall i$ har

$$|f(x) - P_3(x)| = \left| \frac{f^{(4)}(c)}{4!} x^4 \right|$$

$P_3(x)$ är ett approxim.
värde för $f(x)$ med
felet $e = \left| \frac{f^{(4)}(c)}{4!} x^4 \right|$

$$f(x) \sim P_3(x)$$

$$\sqrt{1+x} \approx f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0)$$

$$\textcircled{*} + x^3 \frac{f^{(3)}(0)}{3!} + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} x^4$$

Felet

$$f(x) = \sqrt{1+x} \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, \quad f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4(1+x)^{3/2}}, \quad f''(0) = -\frac{1}{4}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}}, \quad f^{(3)}(0) = \frac{3}{8}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16(1+x)^{7/2}}$$

Dessa värden sätts
in

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{8} x^3 \\
&\quad + \left(\frac{-15}{16(c+1)^{7/2}} \right) \frac{x^4}{4!} \\
&= p_3(x) + \left(\frac{-15}{16(c+1)^{7/2}} \right) x^4 \\
&= \underbrace{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{16} x^3}_{p_3(x)} \\
&\quad + \left(\frac{-15}{16(c+1)^{7/2}} \right) \frac{x^4}{4!}
\end{aligned}$$

$0 \leq x \leq c$

$$\sqrt{1+x} = P_3(x) + \left(\frac{-15}{16(c+1)^{7/2}} \right) \frac{x^4}{4!}$$

$$\sqrt{1+x} \sim P_3(x), \quad 0 \leq x \leq c$$

För $x=1$

$$\sqrt{2} = P_3(1) + \left(\frac{-15}{16(c+1)^{7/2}} \right) \frac{1}{4!}$$

$$|\sqrt{2} - P_3(1)| = \left| \frac{-15}{16(c+1)^{7/2}} \frac{1}{4!} \right|$$

$$P_3(1) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{23}{16} \quad 0 \leq c \leq 1$$

$$\sqrt{2} \sim \frac{23}{16}$$

$$\sqrt{2} - \frac{23}{16} = \frac{-15}{16(c+1)^{7/2}} \frac{1}{4!}$$

$$0 < c < 1$$

Delsvar

ett approximativt värde
av $\sqrt{2}$ är $p_3(1) = \frac{23}{16}$

$$\sqrt{2} \approx \frac{23}{16}$$

Hur stor är felet
 $(\text{Felet}) = \left| \frac{-15}{16(c+1)^{7/2}} \right| \frac{1}{4!}$

$$= \frac{5}{128} \frac{1}{(c+1)^{7/2}}$$

$$\left| \sqrt{2} - \frac{23}{16} \right| = \frac{5}{128} \frac{1}{(c+1)^{7/2}}$$

$$\left| \sqrt{2} - \frac{23}{16} \right| \leq \frac{5}{\underbrace{128}_{100} (0+1)^{7/2}}$$

$$\frac{5}{128} \leq \frac{5}{100}$$

$$\boxed{\sqrt{2} = \frac{23}{16} \pm 5 \cdot 10^{-2}}$$

GRÄNSVÄRDEN bestämmning

Via Taylorsutveckling

EX 2

odef
←

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

Lösning Vi bör kunna

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$$

$x \neq 0$

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right)}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{x^2}{2} + O(x^4)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} + O(x^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} + O(x^2) = \frac{1}{2}$$

L' Hôpital's regel

Vid bestämning av
gränsvärden

1) L' hôpital's regel på
formen $\left[\frac{0}{0} \right]$

• f, g deriverbara
nära $x = a$

• $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \neq \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$$

• L' Hôpital's regel på
formen $\left[\frac{\pm \infty}{\pm \infty} \right]$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{\pm \infty}{\pm \infty} \right]$$

Då gäller att

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Det finns en bra
och enkel bevis
i kursboken!

(lite svårare i
nyttigt material)

Brä $\in X$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x}{x - \arctan x}$$

Lösning

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x}{x - \arctan x} = \left[\frac{0-0}{0-0} \right] = \left[\frac{0}{0} \right]$$

Då gäller L'Hôpital's regel

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx}(\arcsin x - x)}{\frac{d}{dx}(x - \arctan x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

Använd L'Hôpital's regel igen.

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)^{-1/2} = 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - \frac{d}{dx}(1+x^2)^{-1}}{0 - \frac{d}{dx}(1+x^2)^{-1}}$$

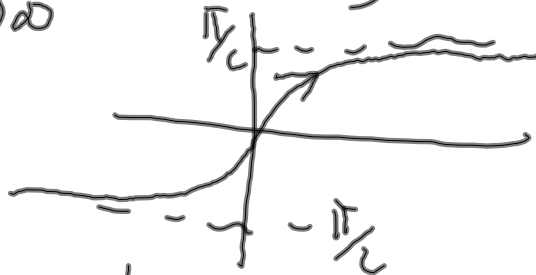
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2}}{(1+x^2)^{-2}} = \frac{1}{2}$$

SVar

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x}{x - \arctan x} = \frac{1}{2}$$

Ex uttryck på formen
 $[0, \infty]$ odef.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\arctan x - \frac{\pi}{2} \right) x = [0, \infty]$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

Om formen gränsvärdet
 på formen $\left[\frac{0}{0} \right]$
 $x = \frac{1}{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\arctan x - \frac{\pi}{2} \right) x =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\arctan x - \frac{\pi}{2} \right) \frac{1}{\frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = [0]$$

2' Hôpital's regel gäller

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx}(\arctan x - \frac{\pi}{2})}{\frac{d}{dx}(\frac{1}{x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

glöm
inte
att
förenkla

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^2}(-1)}{\cancel{x^2}(\frac{1}{x^2} + 1)} \\ &= \frac{-1}{0+1} = -1 \end{aligned}$$

uttryck på formen $(\infty - \infty)$

o def

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right] = [\infty - \infty]$$

Om forma till $\left[\frac{0}{0} \right]$

$$x \neq 1$$

$$\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x \ln x - (x-1)}{(x-1) \ln x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \ln x - (x-1)}{(x-1) \ln x} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

L' Hôpital's regel
gäller

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\frac{d}{dx} (x \ln x - (x-1))}{\frac{d}{dx} ((x-1) \ln x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - (1-0)}{1 \cdot \ln x + (x-1) \cdot \frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\ln x + 1 - 1}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\ln x + 1 - 1}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\ln x + 1 - 1}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\ln x}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

L'Hôpital's rule igen

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\frac{d}{dx} \ln x}{\frac{d}{dx} (\ln x + 1 - \frac{1}{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\frac{1}{x}}{1 + 0 + \frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + 0 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Svar

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right] = \frac{1}{2}$$