

Förel 2: § 17 – 1.10: Logaritm fkn, Trigonometriska fkn, Inversa fkn (cyklometrisk fkn = Inversa till Trigonometriska fkn).

1. Logaritm fkn med basen $a > 0$

Problem: för $x > 0$, sök y :

$$a^y = x$$

Svar $a^y = x \Leftrightarrow y = {}^a\log(x)$

Vi säger att $y = {}^a\log(x)$ är inversen till $x = a^y (= f(y))$

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

obs! $f^{-1}(y) \neq \frac{1}{f(y)}$

obs ${}^a\log(x)$ definierad endast för $x > 0$ och ${}^a\log(a) = 1$

Vi har

$$a^y = x \Leftrightarrow y = {}^a\log(x)$$

$$10^y = x \Leftrightarrow y = {}^{10}\log(x) = \lg(x)$$

$$e^y = x \Leftrightarrow y = {}^e\log(x) = \ln x$$

obs! $e^{\ln x} = x \Leftrightarrow y = \ln(e^y)$

obs! $(f(x))^{g(x)} \Leftrightarrow e^{g(x) \ln(f(x))}$

$f(x) > 0$

Viktiga Räkne regler

$$\bullet \ln(xy) = \ln x + \ln y \neq \ln(x+y)$$

mot ex: $\ln(x+y) \neq \ln x + \ln y$, $x > 0$, $y > 0$

sätt in $x=e$, $y=1$

$$\ln(e+1) \neq \ln(e) + \ln(1) = 1 + 0 = 1 \quad \text{orinligt}$$

(log är inte linjärt (Ej rätläge))

$$\bullet \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y \neq \frac{\ln x}{\ln y}$$

mot ex att $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\ln x}{\ln y}$

$x=e$, $y=1$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(\frac{e}{1}\right) = \ln e = 1$$

$$\frac{\ln(x)}{\ln(y)} = \frac{\ln e}{\ln(1)} = \frac{1}{0} = \text{"}\infty\text{"}$$

Ex lös ekv: $\ln(x^2 + x - 3) = \ln(x+1)$

Lösning $\ln(A) = \ln(B) \Rightarrow A = B$

p.g.a kontinuitet hos $f(x) = \ln x$

$$\ln(x^2 + x - 3) = \ln(x+1) \Rightarrow$$

$$x^2 + x - 3 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

Kontrollera svaret: genom att sätta in $x = \pm 2$ i den givna ekvationen

$$x = -2 \text{ in i } \ln(x^2 + x - 3) = \ln(x+1)$$

$$\ln((-2)^2 + (-2) - 3) = \ln(-2+1)$$

$$x = 2 \Rightarrow \ln(2^2 + 2 - 3) = \ln(2+1)$$

$$\ln(3) = \ln 3 \quad \text{sant}$$

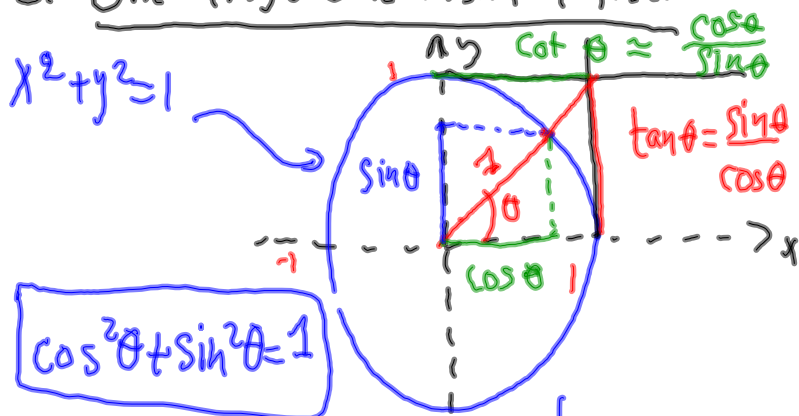
Svar

$$\ln(x^2 + x - 3) = \ln(x+1)$$

har den enda lösningen

$$x = 2$$

2. Om Trigonometriska funktioner



Trigonometriska ekv

$$\sin(x) = \sin(a) \Rightarrow \begin{cases} x = a + 2\pi n \\ x = \pi - a + 2\pi n \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

↑ ↑
ekvokant känd

$$\cos x = \cos a \Rightarrow x = \pm a + 2\pi n$$

$n \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

$$\tan x = \tan a \Rightarrow x = a + n\pi$$

Några kända formler $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \quad (x^2 + y^2 = 1)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

Om $a=b$ så fås

$$\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Om $a=b$ så fås

$$\begin{aligned} \cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= [\cos^2 a + \sin^2 a = 1] = \\ &= \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) \\ &= 2\cos^2 a - 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

Ex Lös $\sin 2x = \sin x$ (*)

Lösning $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

in i (*) så fås:

$$2 \sin x \cos x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - \sin x = 0$$

$$2 \sin x \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 1) & 2 \sin x = 0 \Rightarrow x = n\pi \\ 2) & \cos x = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

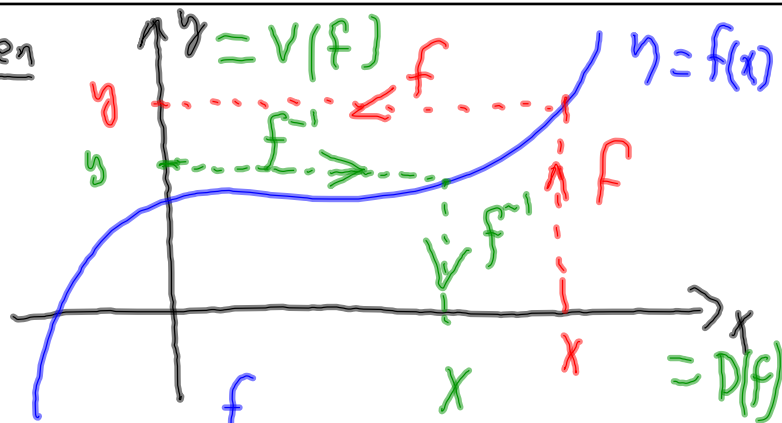
Svar $\sin 2x = \sin x$

har lösningar

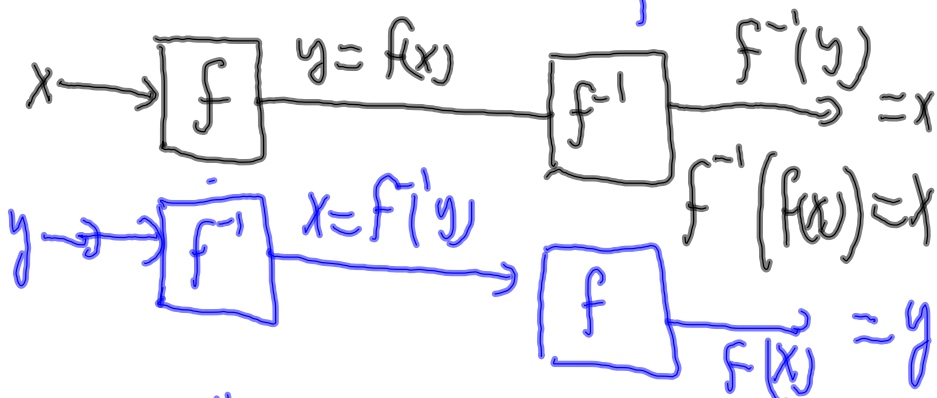
$$x = n\pi \text{ eller } x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Inversen



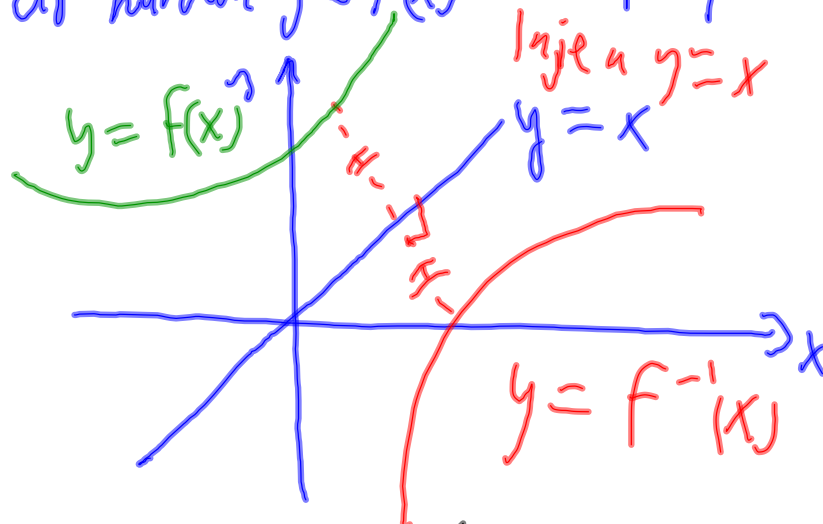
$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{f^{-1}} x$$



alts ått kurvan

$y = f^{-1}(x)$ är spegelbild

av kurvan $y = f(x)$ mot på



obs! $D(f^{-1}) = V(f)$
 $V(f^{-1}) = D(f)$

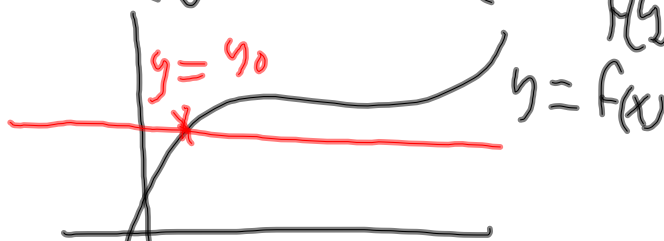
Problem Vilka f har en invers f^{-1} ?

1. f säges ha en invers om
 f är omvändbar (injektiv, 1-1)

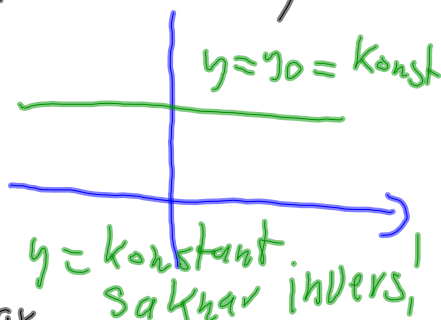
$$\text{dvs } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$
$$x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \neq \frac{1}{f(y)}$$

Geom



Varje linje // med x -axeln
($y = y_0$, $y_0 \in \mathcal{V}(f)$) möter
kurvan $y = f(x)$ högst en gång
Ex vilka av följande f har
en invers (utan räkna)



För tillämpningar

om f är strängt växande (avtagande)
så har f en invers!

(T.ex om $f'(x) > 0$ (strängt väx)

eller om $f'(x) < 0$ (strängt avt)

$$\text{t.ex } f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x = 0$$
$$f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$$

Hur gör man för att hitta inversen

Om man vet att f har en invers
(se tidigare) så räknas ut
inversen ut ekv:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

(om vi vill ha inversen på formen
 $y = f^{-1}(x)$
ur $x = f(y)$ ($\longleftrightarrow$ x mot y))

$$y = f^{-1}(x)$$

EX VET att $y = f(x) = \frac{2x+5}{x-1}$
har en invers. Finn den!

Lösning

$$y = \frac{2x+5}{x-1} \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$y = \frac{2x+5}{x-1} \Leftrightarrow y(x-1) = 2x+5 \Leftrightarrow$$

$$x(y-2) = y+5 \Leftrightarrow x = \frac{y+5}{y-2}$$

svär $f(x) = \frac{2x+5}{x-1} \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \frac{y+5}{y-2}$

Arcus funktionerna : Inverser till
trigonometriska funktioner. (kolla figur
boken)

$$1. y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

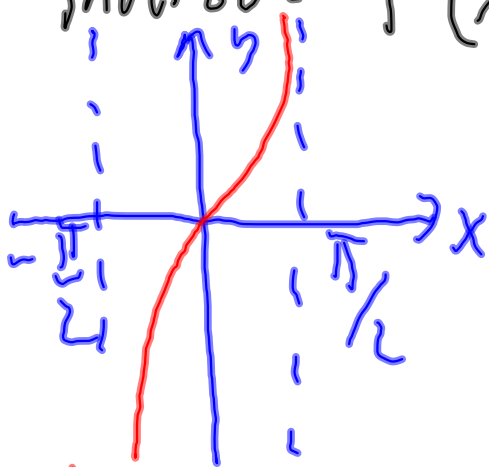
$$\text{Inversen } f^{-1}(x) = \arcsin(x)$$

$$y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, -1 \leq y \leq 1$$

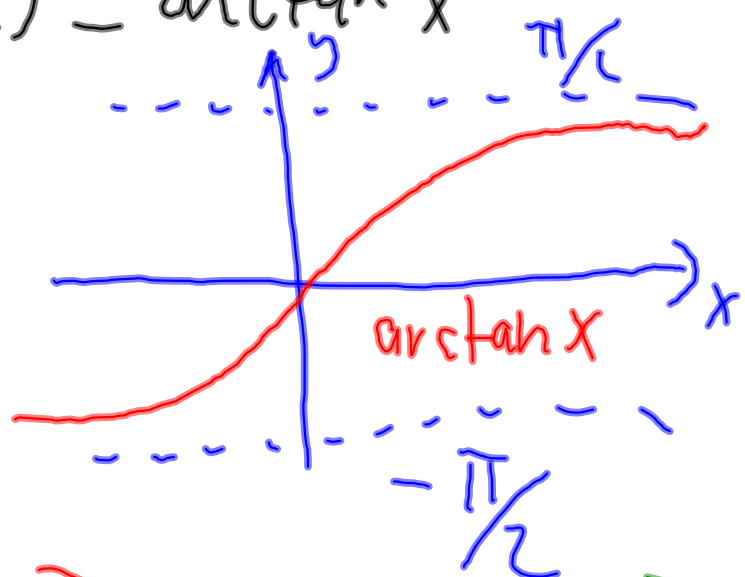
$$2. y = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{inversen } f^{-1}(x) = \arctan x$$



$\tan x$

$$\begin{aligned} \tan x &\rightarrow \infty, x \rightarrow \frac{\pi}{2}^- \\ &\rightarrow -\infty, x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+ \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \arctan x &\rightarrow \frac{\pi}{2}, x \rightarrow \infty \\ \arctan x &\rightarrow -\frac{\pi}{2}, x \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arctan x &\rightarrow \frac{\pi}{2}, x \rightarrow \infty \\ \arctan x &\rightarrow -\frac{\pi}{2}, x \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

ATT Förstå arcusfunktioner

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \Leftrightarrow$$

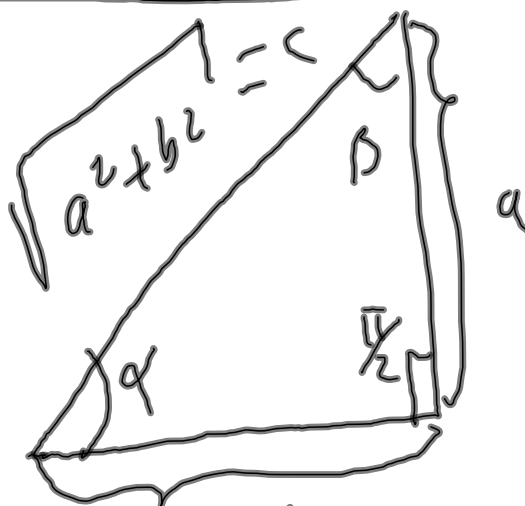
$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a}{c}\right)$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \Leftrightarrow$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \Leftrightarrow$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{b}{c}\right) = \text{inversen till } \cos \alpha.$$



Ex Finn $\cos(\arcsin(1/3))$

Lösning Sätt $\alpha = \arcsin(1/3)$

$$\alpha = \arcsin(1/3) \Leftrightarrow \sin \alpha = 1/3$$

Vi söker

$$\cos(\underbrace{\arcsin(1/3)}_{\alpha}) = \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{2\sqrt{2}}{3} < 1$$

Svar

$$\cos(\arcsin(1/3)) = \frac{2\sqrt{2}}{3} < 1 \quad b = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

