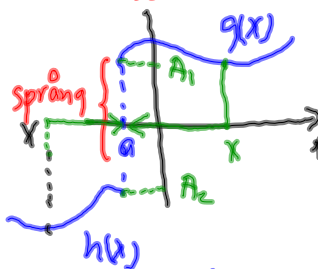


Förel 3: Om gränsvärden § 2.1-2.5

Def $f(x) = \begin{cases} g(x), & x > a \\ h(x), & x < a \end{cases}$

- f säges ha gränsv. A_1 från höger till $x=a$ om $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A_1$
- f säges ha gränsv. A_2 från vänster till $x=a$ om $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A_2$
- f säges ha gränsv. A i $x=a$ om $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$

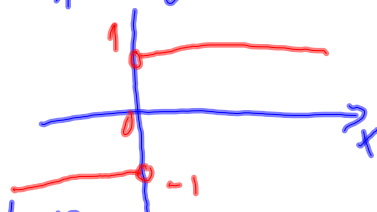


Ex1 $f(x) = \text{sgn}(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \neq$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

Gränsv. saknas



Ex2 $f(x) = k = \text{konstant}$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$

Gränsv. finns

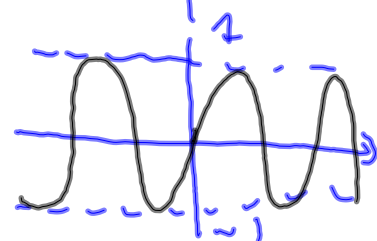


Ex3 $f(x) = \sin x$

$-1 \leq \sin x \leq 1$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x = \pm 1$

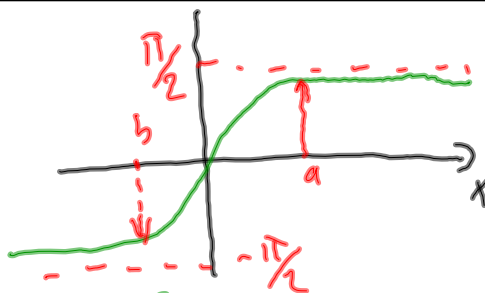
$\therefore \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x$ finns inte



p.s.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos x = \pm 1$ dvs
finns inte

Ex 4



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \quad f(x) = \arctan x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

linjerna $y = \pm \frac{\pi}{2}$ kallas för
värräta asympt

Räknelagar (se kursb. sid 186)

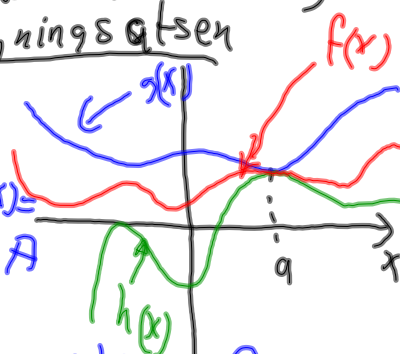
Spec Instängningsatsen

om

$$(1) h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$



Ex 5 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = ?$

Lösning

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{x} \\ x \rightarrow 0 \Leftrightarrow t \rightarrow \infty \end{array} \right]$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t^2} \right) \sin t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin t}{t^2}$$

Vet att $-1 \leq \sin t \leq 1$

$$-\frac{1}{t^2} \leq \frac{\sin t}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin t}{t^2} = 0$$

Svar $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Om standard gränsvärden.

$$1. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

(används för att visa
att $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$)

Ex

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{x^2 - a^2} \quad (a \neq 0)$$

Lösning

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{x^2 - a^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{(x+a)(x-a)} = \begin{cases} t = x-a \\ x \rightarrow a \\ \Leftrightarrow t \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{(t+2a)} \frac{\sin t}{t}$$

$$\left[\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) \right]$$

om $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ finns
 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ finns

$$= \underbrace{\left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t+2a} \right)}_{= \frac{1}{2a}} \underbrace{\left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \right)}_{= 1} = \frac{1}{2a} \quad a \neq 0$$

2. Om Eulers Tal

$e = 2,718281 \dots$
definieras som

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

Som kan skrivas som

$$2.1 \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

$$2.2 \quad \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$$

$$(2.1) \Leftrightarrow (2.2)$$

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{x} \\ x \rightarrow \infty \Leftrightarrow t \rightarrow 0 \end{array} \right]$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left(1+t\right)^{1/t}$$

Ex Visa att $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

(används för att visa $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$)

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{1}{x} \ln(x+1) = \ln\left((x+1)^{1/x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln\left((x+1)^{1/x}\right)$$

$$= \left[\lim_{x \rightarrow a} f(V(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} V(x)\right) \right]$$

om $\lim_{x \rightarrow a} V(x)$ finns

$$= \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} \right] = \ln e = 1$$

e

Hur man använder

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$$

Ex $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \left[n = (2n) \cdot \frac{1}{2} \right] =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{(2n) \cdot \frac{1}{2}} = \left[\begin{array}{l} 2n = m \\ n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \\ m \rightarrow \infty \end{array} \right]$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m/2} = e^{1/2} = \sqrt{e}$$

3. Jämförelse mellan a^x ($a > 1$)
och x^α ($\alpha > 0$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$$

Dvs $a^x \gg x^\alpha$ för stora x

4. Jämförelse mellan $\ln x$
och x^α ($\alpha > 0$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} t^\alpha \ln t = 0$$

$x^\alpha \gg \ln x$ för stora x

$$a^x \gg x^\alpha \gg \ln x \quad \text{stora } x$$

Ex $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = [0^0]$ odef.

obs! $y = \ln t \Leftrightarrow t = e^y = e^{\ln t}$

$$f(x) = e^{\ln(f(x))} \quad f(x) > 0$$

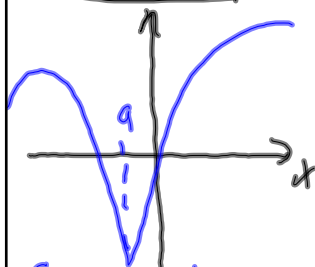
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(x^x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x} \end{aligned}$$

$$\left[\lim_{t \rightarrow 0^+} t^\alpha \ln t = 0, \alpha > 0 \right] = e^0 = 1$$



Tillämpning av gränsv.

Kontinuitet



f kont i $x=a$



f Ej kontin i $x=a$

Def f säges vara

kont i $x=a$ om
1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ finns

2. $f(a) = A$

(1) och (2) $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Typiska problem

Problem 1

$$\text{Är } f(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq a \\ A, & x = a \end{cases}$$

Kontinuerlig i $x=a$?

Svar:

f kontin. i $x=a$ om

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A = f(a)$$

Problem 2

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x > a \\ h(x), & x < a \end{cases}$$

Kont i $x=a$?

SVAR: f kontin. i $x=a$

om $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} h(x) = A$

FÖRSTÅ skillnaden mellan

1) f definierad i $x=a$

2) f kontinuerlig i $x=a$

Ex $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$

ÄR f kontinuerlig i $x=2$?

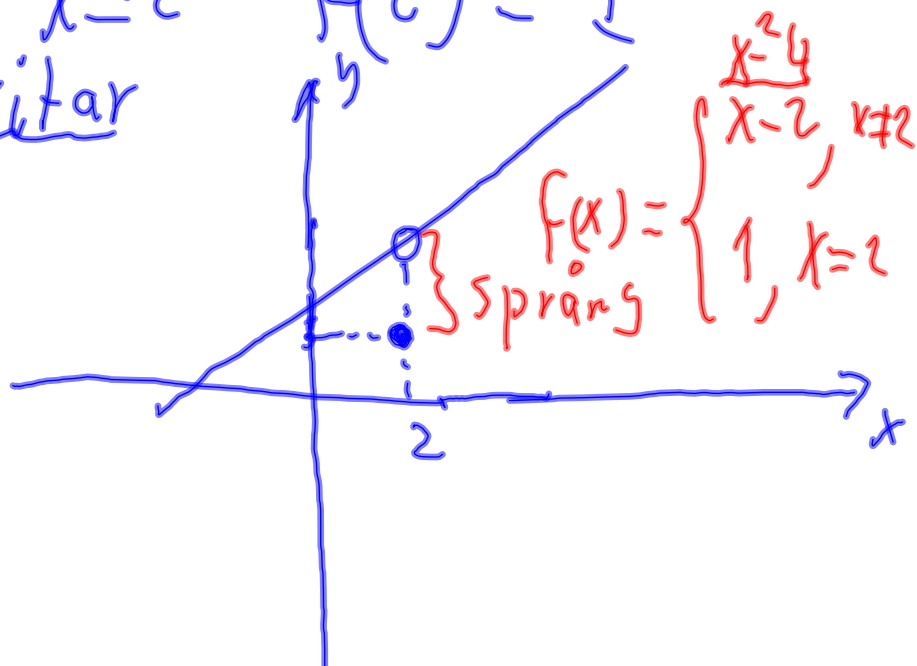
Lösning f är definierad

för alla $x \in \mathbb{R}$. Ty

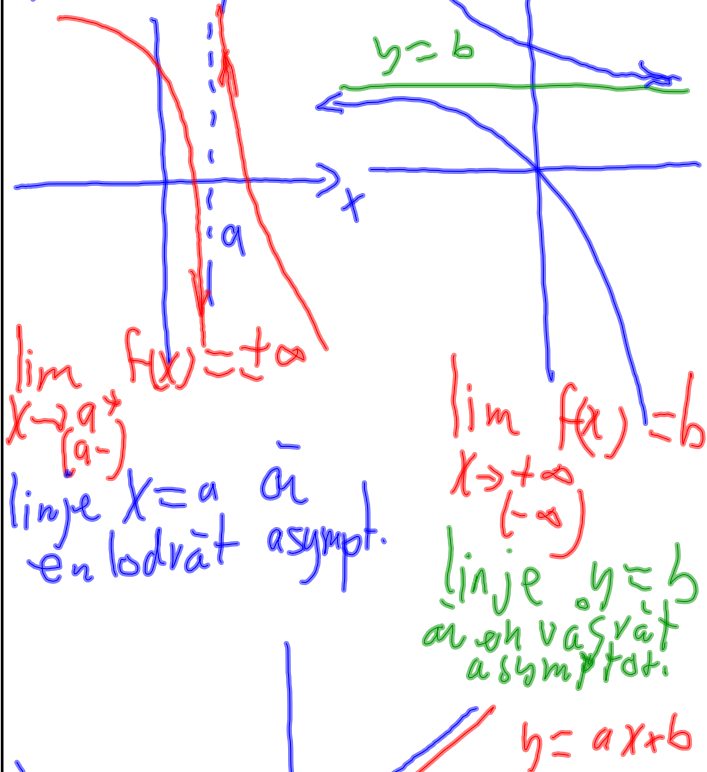
$$\text{för } x \neq 2 \quad f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \\ = x+2.$$

för $x=2$ $f(2) = 1$

Vi ritar



2) asymptoter



om $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax+b)) = \lim_{x \rightarrow \infty} r(x) = 0$

Så säges att $y = ax+b$
 är en sned asymptot.

observera
 för stora x

$$f(x) \sim ax+b$$

$\Rightarrow$

$$\frac{f(x)}{x} \sim a + \frac{b}{x}$$

För att finna talet a

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Metoden att finna a och b

steg 1 Finn a vi

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

om gränsvärd saknas $\rightarrow a^0$
Sned asymptot $y = ax + b$
finns inte

om $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ finns $= a$

steg 2
kolla $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b$

om den finns
 $\rightarrow a$ sned asymptot a
 $y = ax + b$

Annars sned asymptot finns inte

Ex Finn Ev sned asymptot

till $f(x) = \sqrt{1+x^2} \geq 0$

Lösning $f(-x) = \sqrt{1+(-x)^2} = \sqrt{1+x^2}$
 $= f(x)$

Räcker att kolla vid handen för $x > 0$

steg 1 Finn a

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2(1+\frac{1}{x^2})^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$$

$\left[\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$

Svar $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a = 1$

steg 2 Finn b

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{1+x^2} - x)$$

$= [\infty - \infty] = 0$
Fel

Använd konj. regel

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

För $x > 0$, Förenkla

$$\underbrace{\sqrt{1+x^2}}_a - \underbrace{x}_b = (a-b) = (a-b) \frac{(a+b)}{(a+b)}$$

$$= \frac{(\sqrt{1+x^2} - x)(\sqrt{1+x^2} + x)}{\sqrt{1+x^2} + x} = \frac{(\sqrt{1+x^2})^2 - x^2}{\sqrt{1+x^2} + x}$$

$$= \frac{(1+x^2)-x^2}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1+x^2} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = 0$$

pel svar $b = 0$

Svar $f(x) = \sqrt{1+x^2} \geq 0$

har sned asympt

$$y = ax + b = x$$

$$y = a(-x) + b = -x$$

