

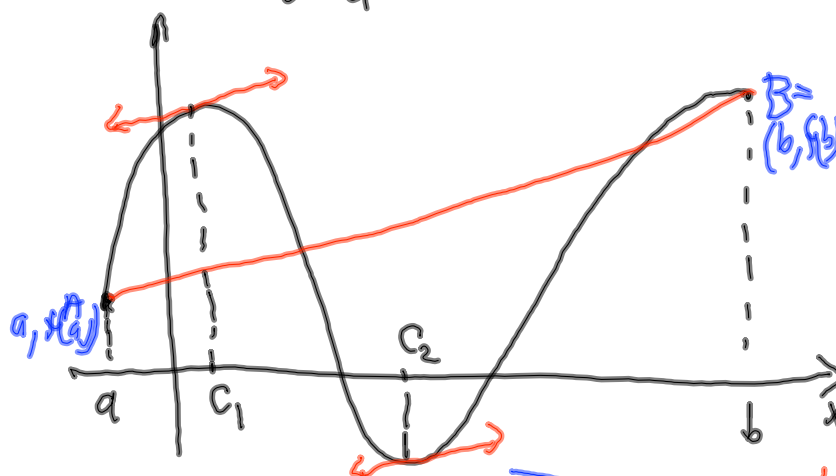
Förel 5. Medelvärdes satsen (MVS) och dess tillämpningar

Antag

1. f kontin. på $a \leq x \leq b$ (kompakt)
2. $f'(x) = \frac{df}{dx}$ finns $a < x < b$ (öppen)

Påst. Det finns ett tal c ($a < c < b$)

$$: \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$



Lutningen till korden AB är $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$
(Här $c : c_1, c_2$)

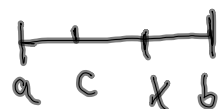
$\approx$ Lutningen till tangenten i $x=c$
(Här $x=c_1, x=c_2$)

Satsen handlar om uppskattning
av differensen mellan $f(a)$ och $f(b)$

$$f(b) - f(a) \approx (b - a) f'(c)$$

Satsen används ofta på formen

$$f(x) - f(a) \approx \underbrace{(x - a)}_{>0} f'(c)$$

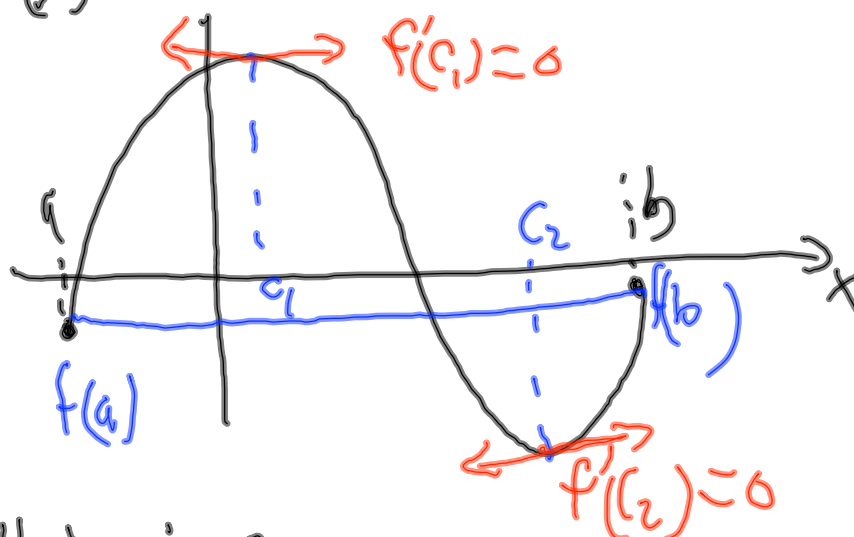


Tillsmning 1

$$f(b) - f(a) = \underbrace{(b-a)}_{>0} f'(c), \quad \begin{array}{c} | \\ a \quad c \quad b \end{array}$$

$$\text{om } f(a) = f(b) \Rightarrow f'(c) = 0$$

$f'(x)$ har en rot i $x=c$



Tillsmning 2

$$\text{om } f'(x) = 0, \quad a < x < b \Rightarrow f(x) = \text{konstant p\u00e5 } a \leq x \leq b$$

H\u00e4r

$$f(x) - f(a) = (x-a) f'(c) \quad \begin{array}{c} | \\ a \quad c \quad x \quad b \end{array}$$

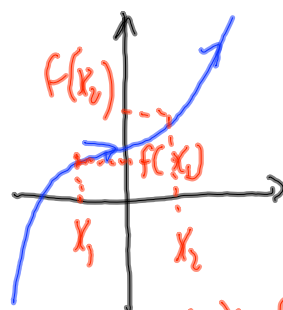
$$f'(c) = 0, \quad a < c < b$$

$$\Rightarrow f(x) = f(a), \quad a \leq x \leq b$$

$$f(x) = \text{konstant}$$

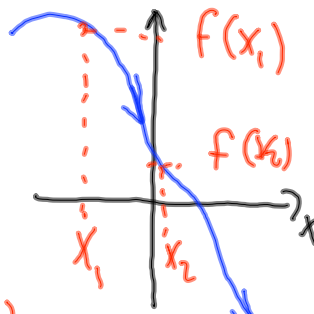
Om derivatan till en kont. fkn \u00e4r noll p\u00e5 ett intervall s\u00e5 f\u00f6ljder att funktionen \u00e4r konstant

Tillämpning 3: Om monotona funktioner



$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$
 f är strängt växande
 (alla i intervallet)

(f har en invers)



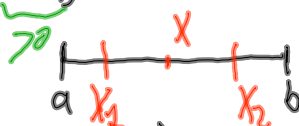
$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$
 f är strängt avtagande

(f har en invers)

MVS

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(x)$$

ger.



I. $f'(x) \geq 0$ på $(a, b) \Leftrightarrow f$ är växande på (a, b)

$f'(x) \leq 0$ på $(a, b) \Leftrightarrow f$ är avtagande på (a, b)

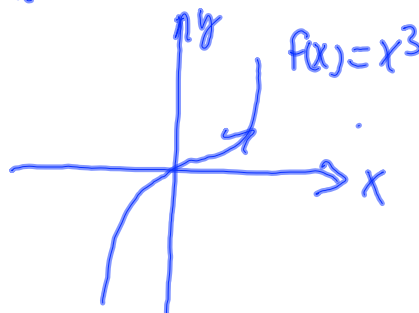
IIa $f'(x) > 0$ på $(a, b) \Rightarrow f$ är strängt växande på (a, b)

IIb $f'(x) < 0$ på $(a, b) \Rightarrow f$ är strängt avtagande på (a, b)

obs! f strängt växande $\nRightarrow f'(x) > 0$

Tg: $f(x) = x^3$ är strängt växande
 $f'(x) = 3x^2 \geq 0$

$x_1 < x_2$



Ex 1 undersök för vilka $x \in \mathbb{R}$

$$\text{om } f(x) = 2x - \ln(1+3x^2)$$

strängt växande (har en invers)

Lösning MVS ger att

om $f'(x) > 0$ så följer att

f är strängt växande (har en invers)

$D(f)$: alla $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = 2x - \ln(1+3x^2)$$

Def från
alla x

Def från
alla x

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} (2x - \ln(1+3x^2)) \\ &= 2 - \frac{d}{dx} \ln(1+3x^2) \end{aligned}$$

$$\left[\frac{d}{dx} \ln(u(x)) = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) \right]$$

$$= 2 - \frac{1}{1+3x^2} \cdot \frac{d}{dx} (1+3x^2)$$

$$= 2 - \frac{6x}{1+3x^2} = \frac{2(1+3x^2) - 6x}{1+3x^2}$$

$$= \frac{6x^2 - 6x + 2}{1+3x^2}$$

$$= \left[6x^2 - 6x + 2 = 6 \left(x^2 - x + \frac{1}{3} \right) \right]$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \quad \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2$$

$$a^2 - 2ab = (a-b)^2 - b^2$$

$$= 6 \left(\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) = 6 \left(\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{3}{12} + \frac{4}{12} \right)$$

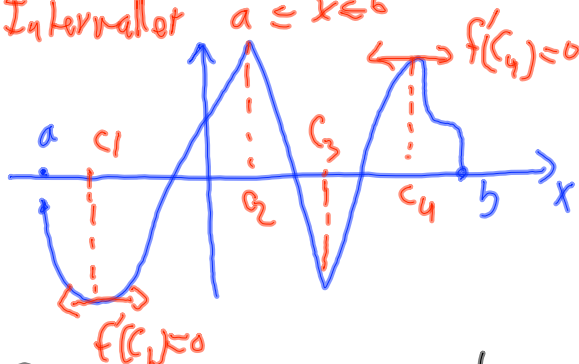
$$6 \left(\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} \right) > 0$$

$\therefore f'(x) > 0 \Rightarrow f$ är strängt växande
alla x

Egenskaper hos kont. f-typer

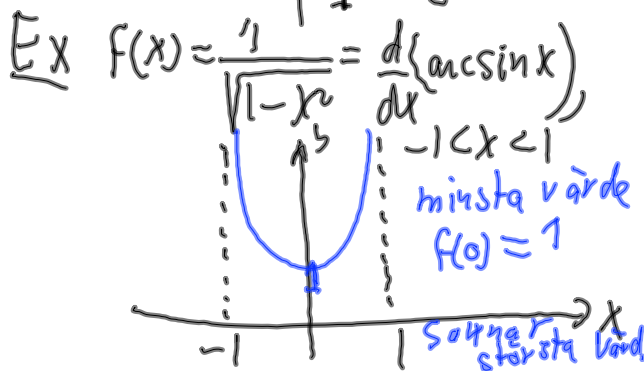
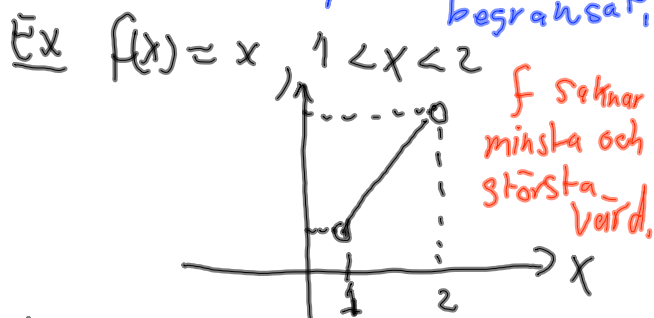
Existens av Extremvärden

Om f är kontinuerlig på $a \leq x \leq b$
 så följer att f har ett största
 och ett minsta värde på
 Intervallot $a \leq x \leq b$



f är deriverbar i c_2 och c_3
 i c_1, c_4 $f'(c_1)=0, f'(c_4)=0$
 c_2 och c_3 där derivatan inte finns
 kallas för singulära punkter
 c_1, c_4 kallas för stationära punkter

Viktigt att ① f kont på $a \leq x \leq b$
 ② intervallet skall vara
 kompakt: slutet och begränsat



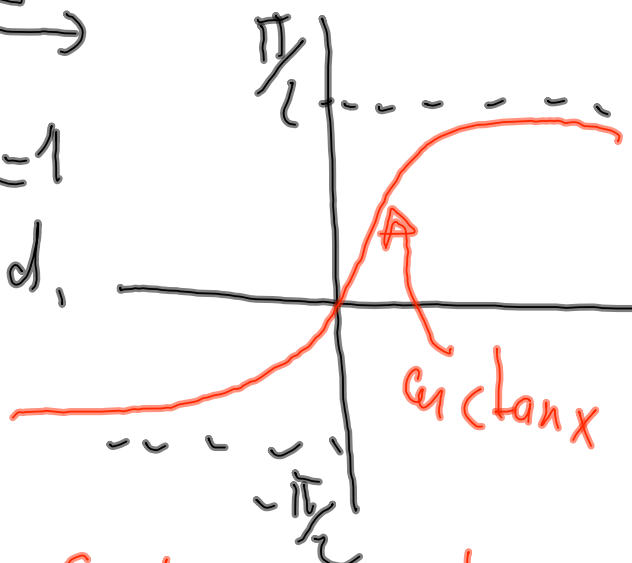
Ex

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{d}{dx} (\arctan x)$$

$x \in \mathbb{R}$



största värd $f(x)=1$
Saknar minsta värd,



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$\lim_{A \rightarrow \infty} [\arctan x]_{-A}^A$$

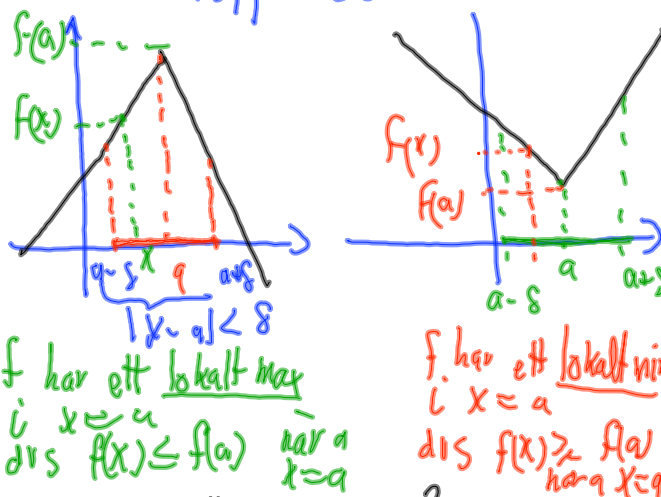
$$= \lim_{A \rightarrow \infty} \arctan(A) - \lim_{A \rightarrow \infty} \arctan(-A)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

Saknar minsta
och största värd

Hur använder man Derivatans

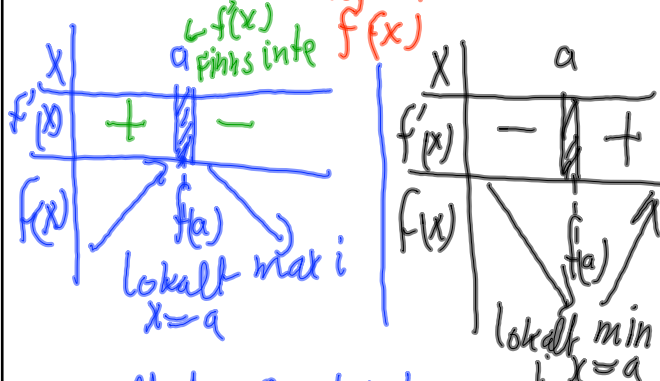
Problem: Bestäm funktionens
"Toppar och dalar"



Hur skall vi göra?

A. Första Derivatans TEST

Studera Teckens ändringen hos $f'(x)$



Resultat om lokala Extremvärden

Ett lokalt max/min kan antas i någon av följande punkter.

1. EV. ändpunkter där f är definierad.
Säg $f(a)$ och $f(b)$
2. Stationära punkter dvs punkter där $f'(x) = 0$
3. Singulära punkter (dvs där f' inte finns)

Bra Ex studera $f(x) = x - 2 \arctan x$

Lösning ① $D(f)$: alla $x \in \mathbb{R}$

② f saknar lodrät asympt
ty f är kont och def
för alla x

③ Finns vågrät asympt?
(Finns n: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = A$)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x - 2 \arctan x) = \pm \infty$$

(obs! $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \end{cases}$)

svar nej!

4) Sked asympt?
dvs $y = ax + b$

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - 2 \arctan x}{x}$$

$$= 1 - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 \arctan x}{x} = 1 - 0$$

Svar $a = 1$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x - 2 \arctan x - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-2 \arctan x)$$

$$= \begin{cases} -2(\frac{\pi}{2}) & x \rightarrow +\infty \\ -2(-\frac{\pi}{2}) & x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\pi & x \rightarrow \infty \\ \pi & x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Svar $y = x \pm \pi$

⑤ Studera $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} (x - 2 \arctan x)$$

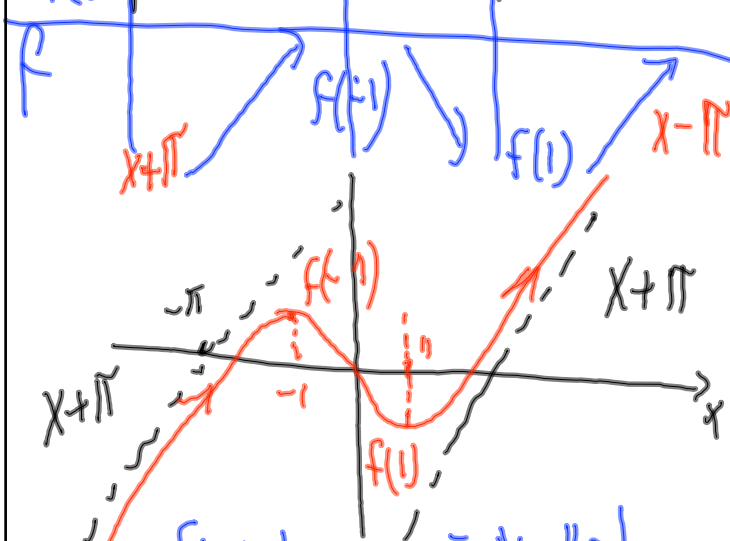
$$= 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{1+x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ då } x = \pm 1$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{1+x^2}$$

Teckenväxling hos $f'(x)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x+1$	-	0	+	+
$x-1$	-	-	0	+
$\frac{x^2-1}{1+x^2}$	+	0	-	+
$\frac{x^2-1}{x^2+1} = f'(x)$				



$f(x)$ har TRE Nollst.

f har ett lokalt max
i $x = -1$ och

ett lokalt min i $x = 1$

men saknar största och
minsta värde