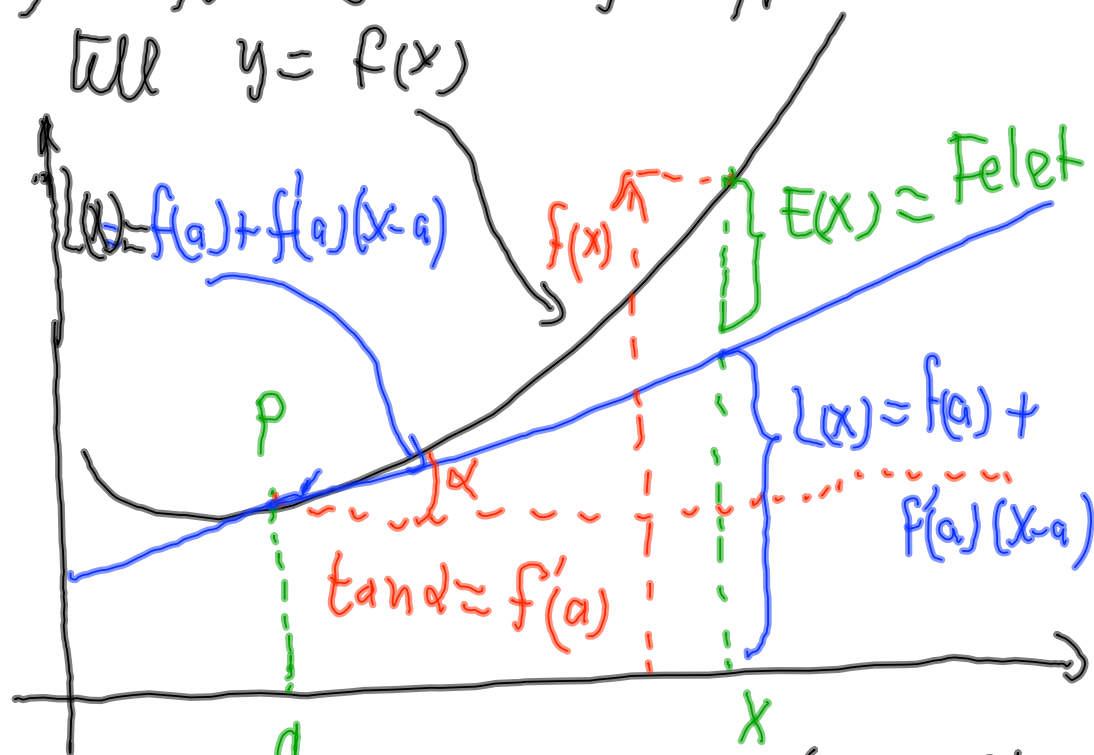


Förel 6:

1) Tangent linje = linjär approximation

till $y = f(x)$



Tangent linje $L(x) = f(a) + (x-a) f'(a)$
 en ex. linjär approximation
 till kurvan $y = f(x)$ kring
 punkten a .

Felet som vi gör genom
 att ersätta $y = f(x)$ med

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

ges av

$$|E(x)| = |f(x) - L(x)|$$

Ex 1 $f(x) = \frac{1}{3}x^2$, $a=3$

Hur bra kan tangent linjen $L(x)$
till $f(x)$ approximerar $f(x)$
nära $x=3$?

$$L(x) = f(3) + (x-3)f'(3) = \dots = 2x-3$$

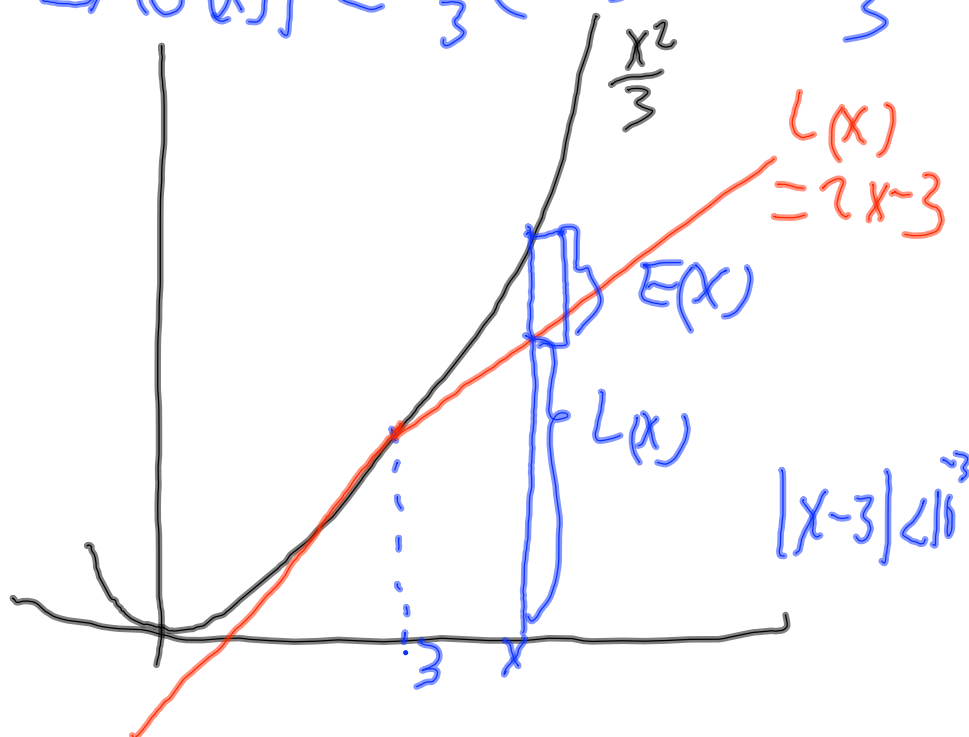
Felet

$$|E(x)| = \left| \frac{x^2}{3} - (2x-3) \right| = \frac{|x-3|^2}{3}$$

Storlek på felet beror på
avståndet från $a=3$.

Väl t.ex $|x-3| < 10^{-3}$

$$\Rightarrow |E(x)| \leq \frac{1}{3}(10^{-3})^2 = \frac{10^{-6}}{3}$$



ATT Finna Extremvärden Till kontinuerliga funktioner

Grundsats f kontinuerlig på ett
kompakt intervall $[a, b] = a \leq x \leq b$
Så antar f sitt största och minsta
värde på intervallet $[a, b]$

punkter som ger extremvärden

- ① Stationära punkter ($f'(x) = 0$)
- ② singulära punkter ($f'(x)$ inte finns)
- ③ ändpunkterna ($f(a), f(b)$)

För att finna lokala Extremv.
använd första derivatans test

x	a
$f'(x)$	$- \quad \quad +$
$f(x)$	$f(a)$ lokalt min.

x	a
$f'(x)$	$+ \quad \quad -$
$f(x)$	$f(a)$ lokalt Max

Ex Finn lokala extremvärden

till $f(x) = x 2^{-x}$

Lösning $f(x)$ är kontinuerlig
och deriverbar för alla $x \in \mathbb{R}$
 $\mathbb{R}$ ej ändligt och slutet
intervall.

Vidare singulära punkter
finns inte ty f kontinuerlig
för alla $x \in \mathbb{R}$

Kvarstår endast:
STATIONÄRA punkter

dvs $f'(x) = 0$.
 $f'(x) = \frac{d}{dx} (x 2^{-x}) =$

$\left[f(x) = e^{\ln(f(x))}, f(x) > 0 \right]$

$= \frac{d}{dx} \left(x \underbrace{e^{\ln(2^{-x})}}_{e^{-x \ln 2}} \right) \left[\ln(x^y) = y \ln x \right]$

$= \frac{d}{dx} (x e^{-x \ln 2}) = \text{produktregel}$

$= \frac{d}{dx}(x) (e^{-x \ln 2}) + x \frac{d}{dx}(e^{-x \ln 2})$

$= 1 \cdot e^{-x \ln 2} + x (-\ln 2 e^{-x \ln 2})$
 $= \left(\frac{d}{dx} e^{ax} = a e^{ax} \right)$

$$= e^{-x \ln 2} - x \ln 2 e^{-x \ln 2}$$

$$= \underbrace{e^{-x \ln 2}}_{2^{-x}} (1 - x \ln 2)$$

peilsvar $\frac{d}{dx} (x 2^{-x}) = 2^{-x} (1 - x \ln 2)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{2^{-x}}_{\neq 0} (1 - x \ln 2) = 0$$

$$\Rightarrow 1 - x \ln 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln 2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{\ln 2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$f\left(\frac{1}{\ln 2}\right)$	

$x = \frac{1}{\ln 2}$ ger lokalt max

Alt $f(x) = x 2^{-x}$

Använd sk log. derivering

$$\frac{d}{dx} \ln(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$\ln(f(x)) = \ln(x 2^{-x})$$

$$= \ln x + \ln(2^{-x})$$

$$\ln(f(x)) = \ln x - x \ln 2$$

$$\frac{d}{dx} \ln(f(x)) = \frac{d}{dx} (\ln x - x \ln 2)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} - \ln 2$$

$$= \frac{1 - x \ln 2}{x}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1 - x \ln 2}{x} \Rightarrow$$

$$f'(x) = f(x) \left(\frac{1 - x \ln 2}{x} \right)$$

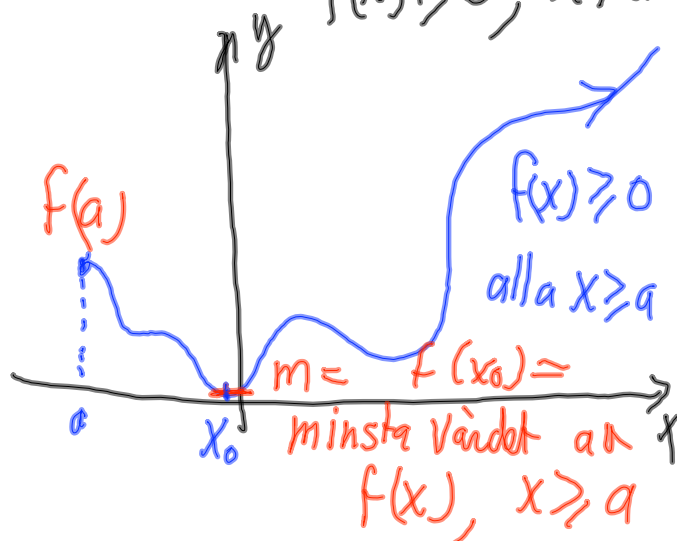
$$= \cancel{x} 2^{-x} \left(\frac{1 - x \ln 2}{\cancel{x}} \right)$$

Svar $f'(x) = 2^{-x} (1 - x \ln 2)$

Hur man löser olikhetsproblem

Problem Låt $f(x)$ vara definierad och kontinuerlig för $x \geq a$

Visa att $f(x) \geq 0, x \geq a$



Att visa att $f(x) \geq 0, x \geq a$
 $\Leftrightarrow$ Att finna det minsta värdet av f och kolla att detta värde ≥ 0

Allm Visa att $g(x) \geq h(x), x \geq a$
 sätt $f(x) = g(x) - h(x)$

$$g(x) \geq h(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) - h(x) \geq 0$$

Ex Visa att $\ln \sqrt{x} > \left(\frac{x-1}{x+1} \right), x > 1$

Lösning

$$\text{sätt } f(x) = \ln \sqrt{x} - \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$$

och nu undersök om

$$f(x) > 0, x > 1$$

Lösning steg 1 kolla att

$$f(1) \geq 0$$

$$f(x) = \ln \sqrt{x} - \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$$

$$f(1) = \ln \sqrt{1} - \left(\frac{1-1}{1+1} \right) = 0$$

Vet att om

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ är strängt växande}$$



$$f(x) = \underbrace{\ln \sqrt{x}}_{\substack{\ln(x)^{1/2} \\ \frac{1}{2} \ln x}} - \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \quad \left[\ln x^a = a \ln x \right]$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln x - \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$$

$$f'(x) = \underbrace{\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \ln x \right)}_{\frac{1}{2x}} - \underbrace{\frac{d}{dx} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)}_{\frac{2}{(x+1)^2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2x} - \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)^2 - 2 \cdot (2x)}{2x(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2 - 2 \cdot 2x}{2x(x+1)^2} =$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 1 - 4x}{2x(x+1)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x + 1}{2x(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{2x(x+1)^2}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{(x-1)^2}{2x(x+1)^2} > 0, \quad \underline{x > 1}$$

Vi har visat

$$\ln \sqrt{x} - \left(\frac{x-1}{x+1} \right) > 0, \quad x > 1$$

$$\Leftrightarrow \ln \sqrt{x} > \left(\frac{x-1}{x+1} \right), \quad x > 1$$

Tillämpning av kedjeregeln Implicit derivering

Om vi sambandet $g(x, y) = 0$

Kan vi lösa ut $y = f(x)$

Så säges att $y = f(x)$

är EXPLICIT DEFINIERAD

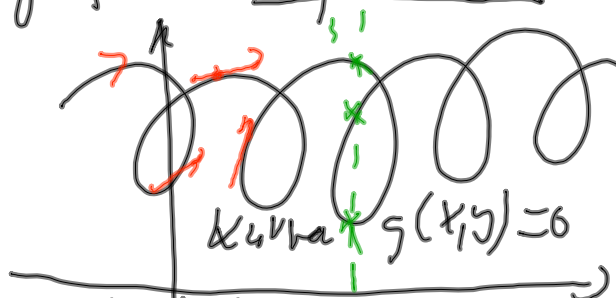
Annars IMPLICIT DEFINIERAD

Ex $g(x, y) = e^x - y = 0$

$\Rightarrow y = e^x$ explicit def.

Ex $g(x, y) = y^3(x) + e^{xy}(x)$
 $+ 2 = 0$

$y = f(x)$ är implicit def.



Implicit derivering

Sambandet $xy + y^2 = 2x$

definiera $y = f(x)$

Bestäm $y'(x) = \frac{df}{dx}$

Lösning Sätt $y = y(x)$

$\Rightarrow xy(x) + y^2(x) = 2x$

$\frac{d}{dx}(xy(x) + y^2(x)) = \frac{d}{dx}(2x)$

$$\underbrace{\frac{d}{dx} (x y(x))}_{1 \cdot y(x) + x y'(x)} + \underbrace{\frac{d}{dx} (y^2(x))}_{2 y(x) y'(x)} = \underbrace{\frac{d}{dx} (2x)}_2$$

$$\therefore y(x) + x y'(x) + 2 y(x) y'(x) = 2$$

$$x y'(x) + 2 y(x) y'(x) = 2 - y(x)$$

$$y'(x) (x + 2 y(x))$$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{2 - y}{x + 2y}$$

Vill $y'(1)$ då $(x_0, y_0) = (1, 1)$

$$y'(1) = \frac{2 - 1}{1 + 2 \cdot 1} = \frac{1}{3}$$