

Förel 8: Riemanns summor

- Analysens huvudsats

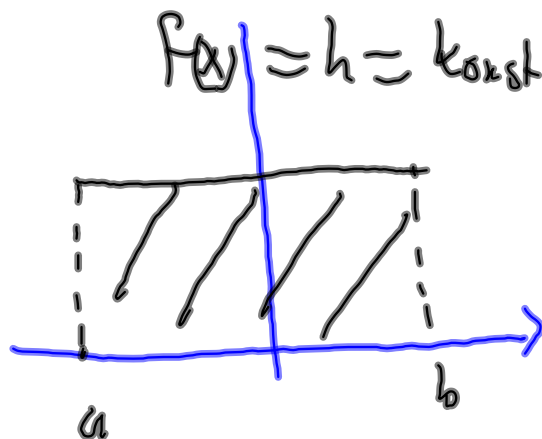
• Riemanns Summor

Problem Hur beräknas $\int_a^b f(x) dx = \text{TAL}$
utan primitiva funktioner?

Areans problem

a) $f(x) = h \quad a \leq x \leq b$

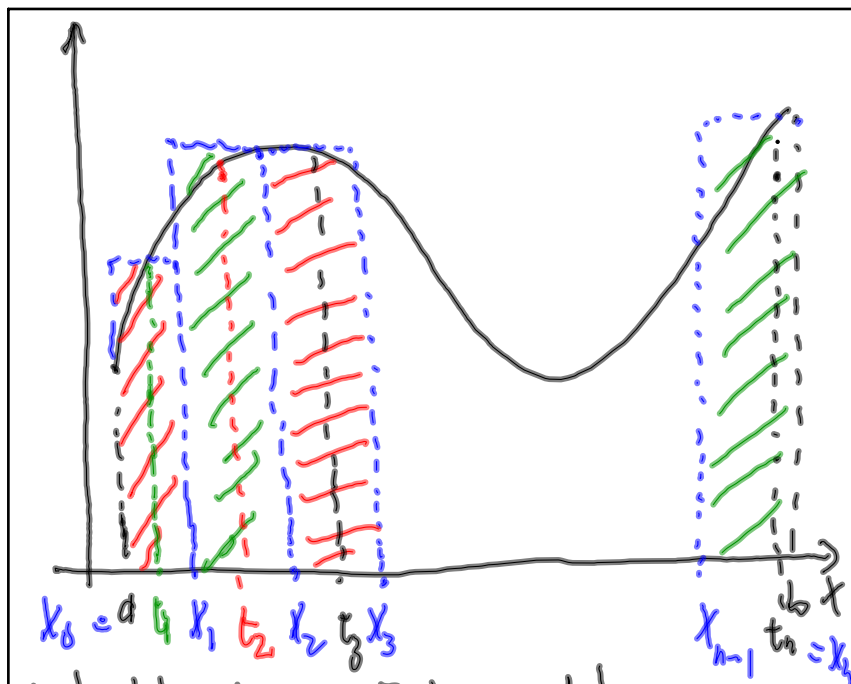
$$A(D) = h(b-a) \\ = \left(\int_a^b h \, dx \right)$$



b) Låt $f(x) \geq 0$, kontinuerlig på $a \leq x \leq b$
 $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$

Sök $A(D) = \int_a^b f(x) \, dx$





Delat intervallet $[a, b]$ i n delar

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = [x_{k-1}, x_k]$$

$$\text{låt } t_k : x_{k-1} \leq t_k \leq x_k, \quad k = 1, \dots, n$$

$$S_n = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k = \text{längsta delintervallet}$$

bland $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_{n-1}, \Delta x_n$

Bilda Riemanns medelsumman

$$R_n(f) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k$$

Om $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f)$ finns då $S_n \rightarrow 0$

och är lika med ett TAL så

säges att f är Riemanns integrerbar

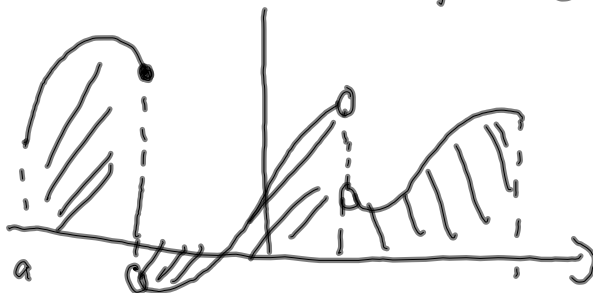
på $a \leq x \leq b$ och tecknas

Problem 2 När finns $\int_a^b f(x) dx$?
dvs när gäller att

$$\sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k \longrightarrow \int_a^b f(x) dx$$

då $S_n \rightarrow 0$
 $n \rightarrow \infty$

Svar f är styckvis kont på $[a, b]$



An beräknas på "enkelsätt"

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k, \quad S_n \rightarrow 0$$

Svar $t_k = x_k = a + k \frac{(b-a)}{n}$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{(b-a)}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{(b-a)}{n}\right) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

Ex $f(x) = x, a=0, b=1$

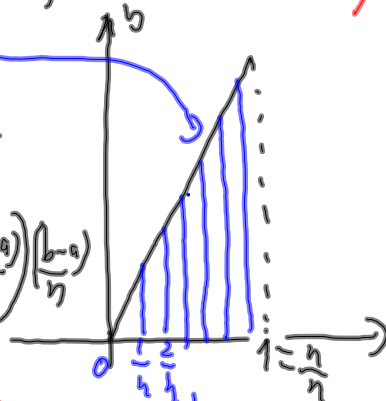
$$A(D) = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$$

Bildar

$$R_n(f) = \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{(b-a)}{n}\right) \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

med $a=0, b=1$

$$R_n(f) = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$



$$R_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) =$$

$$\left[\text{med } f(x) = x \Rightarrow f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n} \right]$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k$$

$$= \frac{1}{n^2} \left(\underbrace{1+2+3+\dots+n}_{n(n+1)} \right) =$$

$$= \frac{1}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{1}{2n^2} (n^2 + n) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

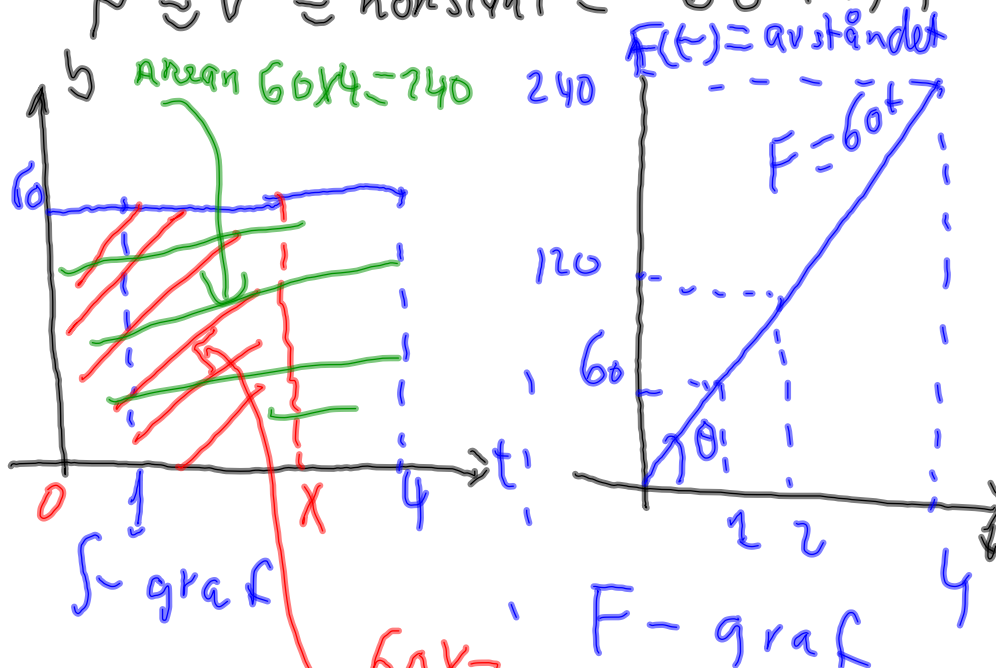
$$R_n(f) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

$$R_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \int_0^1 x dx$$

Analysens Huvudsats =
 Samspel mellan F och $\frac{dF}{dx} = f$

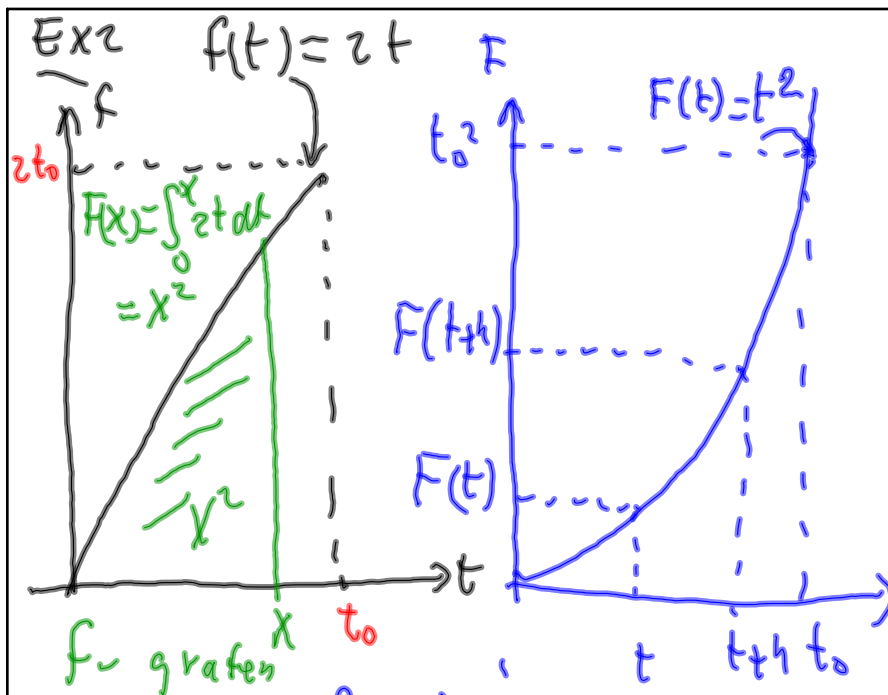
Ex 1 $f \approx v$ = hastighet
 F = Avståndet

$F' \approx v$ = konstant = 60 km/h



$$\begin{cases} F(x) \approx \int_0^x 60 dt \\ F(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} & \text{Lutningen } \tan \theta \\ & = \frac{240}{4} = 60 \end{aligned}$$

Lutningen av F -grafen ger
 hastighet $v \approx f$
 Arean under f -grafen ger
 AVSTÅNDET



Area under f -grafen

$$0 \leq x \leq t_0$$

$$\frac{2t_0 \cdot t_0}{2} = t_0^2$$

hastighet =
Lutningen till
 F

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(t+h)^2 - t^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 2t+h = 2t = f(t)$$

① Lutningen till F -grafen
ger hastighet
 $f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h}$

② Area under f -grafen
ger avståndet
 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

$$0 < x < t_0$$

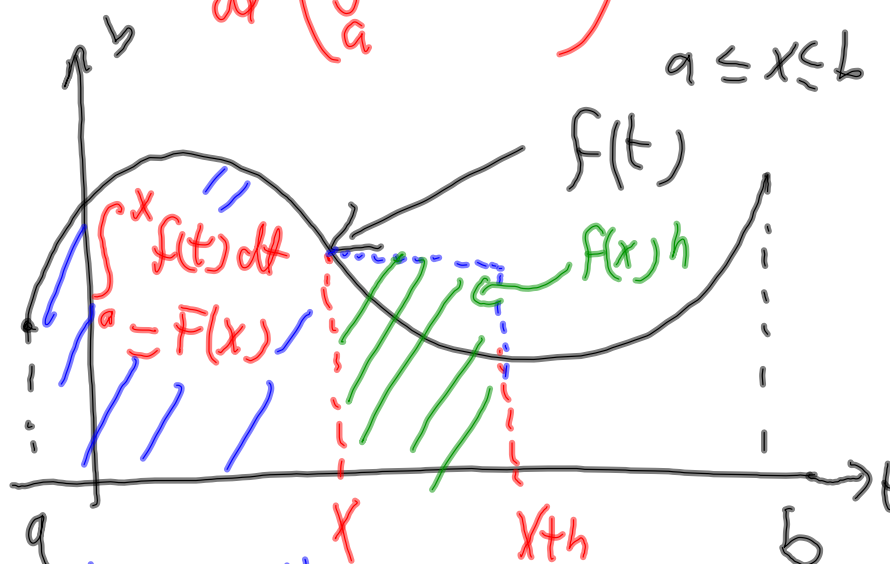
Analysens grundsats

Varje kontinuerlig funkt f på $[a, b]$ har en kontinuerlig och deriverbar primitiv funktion F som ges

$$\begin{cases} F(x) = \int_a^x f(t) dt, & \frac{dF}{dx} = f(x) \\ F(a) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$$

$$a \leq x \leq b$$



För h litet

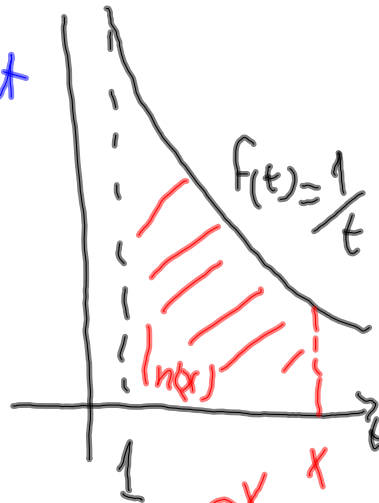
$$F(x+h) - F(x) \approx F'(x)h$$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx f(x)$$

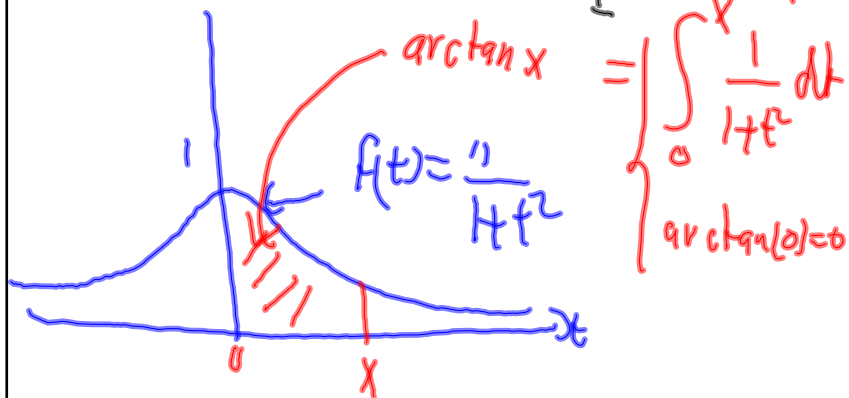
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

Ex1

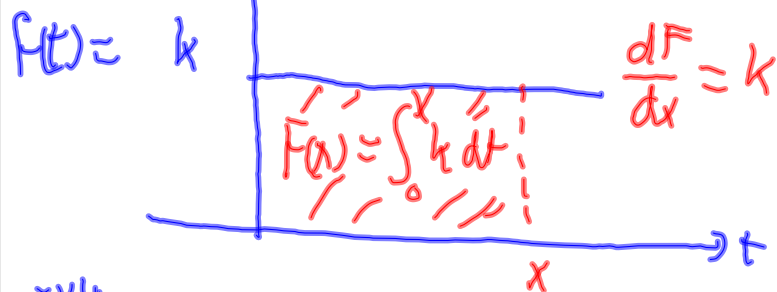
$$\begin{cases} \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt \\ \ln(1) = 0 \end{cases}$$



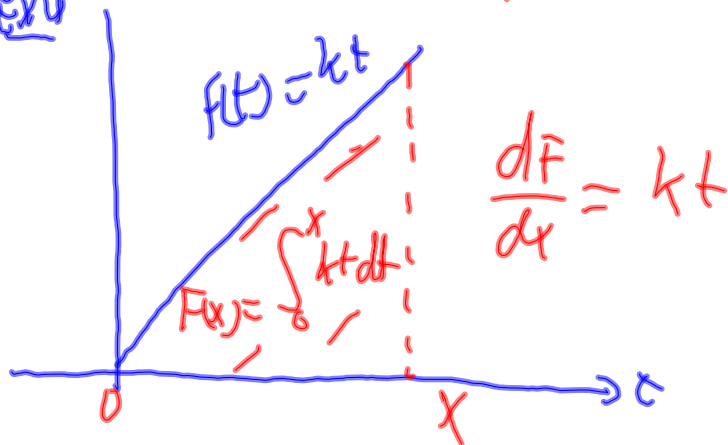
Ex2



Ex3



Ex4



Ex $\frac{d}{dx} \int_3^x \frac{\sin t}{t} dt \quad 3 \leq x \leq 10$

Lösning ~~ok~~, en primitiv till $\frac{\sin t}{t}$
 kan ej uttryckas mha Elementära
 funktions
 Enligt analysens grund sats

$$\frac{d}{dx} \int_3^x \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\sin x}{x}, \quad 3 \leq x \leq 10$$

Alt sätt $F(x) = \int_3^x \frac{\sin t}{t} dt$

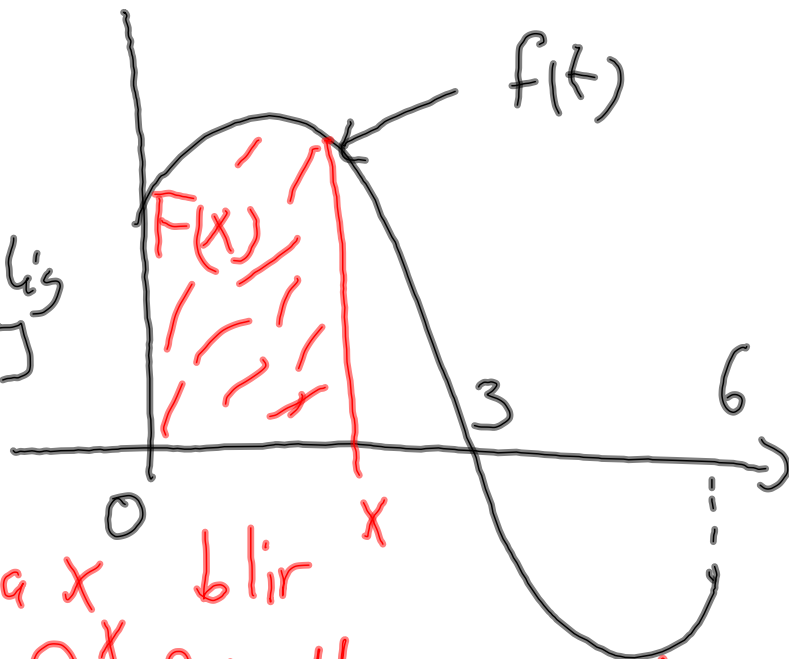
da $F'(t) = \frac{\sin t}{t}$

$$\int_3^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[F(t) \right]_3^x = F(x) - F(3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\int_3^x \frac{\sin t}{t} dt \right) &= \frac{d}{dx} (F(x) - F(3)) \\ &= \frac{d}{dx} F(x) - 0 \\ &= \frac{\sin x}{x} \end{aligned}$$

Ex A

$f(t)$ är
kontinuerlig
på $[0, 6]$



För vilka x blir

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ maximal}$$

$$0 \leq x \leq 6$$

Lösning Vi använder första derivatans
TEST

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_0^x f(t) dt \right) = f(x)$$

x	0	3	6	
$F'(x) = f(x)$		+	0	-
$F(x)$				

$F(3)$

maximalt i $x=3$

Svar $F(3) = \int_0^3 f(t) dt$

6.10 Bestäm den punkt i vilken $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} \sin t \, dt$
 $0 \leq x \leq 2\pi$

antar sitt största värde

Lösning Använd första derivatan
 TEST

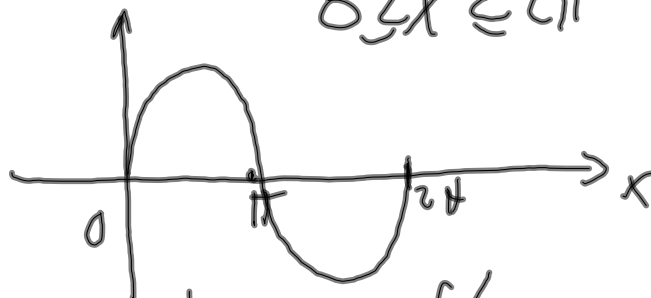
$$f'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x e^{-t^2} \sin t \, dt$$

$$= e^{-x^2} \sin x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-x^2} \sin x = 0$$

$$e^{-x^2} > 0 \therefore f'(x) = 0 \Rightarrow \sin x = 0$$

$$0 \leq x \leq 2\pi$$



Teckenväxling hos $f'(x)$
 $\approx$ teckenväxling hos $\sin x$

x	0	π	2π
$f'(x)$	0	+	-
$f(x)$			

$f(\pi) = \int_0^\pi e^{-t^2} \sin t \, dt =$
 maximalt!