

Förel 9: Rep in för KS 1: §0-4.

Derivator för elementära funktions

$f(x)$	$f'(x)$	$f(u(x))$	$f(u(x))' =$ $f'(u(x)) \cdot u'(x) =$ $\frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ inre deriv.
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$ $\alpha \neq -1$	$(u(x))^\alpha$	$\alpha (u(x))^{\alpha-1} \cdot u'(x)$
e^x	e^x	$e^{u(x)}$	$e^{u(x)} \cdot u'(x)$
$\ln x $	$\frac{1}{x}$	$\ln(u(x))$	$\frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(u(x))$	$\cos(u(x)) \cdot u'(x)$
$\cos(x)$	$-\sin x$	$\cos(u(x))$	$-\sin(u(x)) \cdot u'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(u(x))$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2(x)}} \cdot u'(x)$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(u(x))$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2(x)}} \cdot u'(x)$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(u(x))$	$\frac{1}{1+u^2(x)} \cdot u'(x)$
$\tan x$	$1+\tan^2 x$	$\tan(u(x))$	$(1+\tan^2(u(x))) \cdot u'(x)$

Ex 1 a) Bestäm största och minsta värden av $f(x) = 2x^3 - 3x^4$ på int. $[-1, 1]$: $-1 \leq x \leq 1$

b) Lös samma problem då intervall är öppet $(-1, 1)$:
 $-1 < x < 1$

Lösning a) Förklara vad skall göras!
 $f(x) = 2x^3 - 3x^4$ är kontin på det kompakta intervallet $[-1, 1]$
 $\Rightarrow f$ antar sitt största och minsta värde på $[-1, 1]$

Som antas i

- ändpunkterna -1 och 1
- stationära punkter dvs där $f'(x) = 0$
- singulara punkter där $f'(x)$ inte finns (Här ser man dessa)

Ändpunkterna

$$f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^4 = -5$$

$$f(1) = 2(1)^3 - 3(1)^4 = -1$$

Stationära punkter: dvs där $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(2x^3 - 3x^4) = 6x^2 - 12x^3$$

$$= 6x^2(1 - 2x) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, \frac{1}{2}$$

$$f(0) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$$

Delsvor $f(0) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$
 $f(-1) = -5, f(1) = -1$

minstavärde för f ges då

$$f(-1) = -5$$

största värde för f ges då

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$$

b) samma problem då $-1 < x < 1$
ändpunkterna finns inte
med.

$$f'(x) = 6x^2(1-2x) \quad -1 < x < 1$$

$\Rightarrow x=0, x=1/2$ som ligger
innehåller intervallet $(-1, 1)$

$$f(0) = 0, f(1/2) = 1/16$$

x	-1	0	$1/2$	1
$6x^2$	+	0	+	
$1-2x$		+	0	-
$f'(x) = 6x^2(1-2x)$	+	0	0	-
$f(x)$			$f(1/2)$	

$\swarrow$ svar största värde
 $\searrow$ $f(1/2) = 1/16$

minsta serkas

Ex 2 Bestäm och klassificera de lokala extrempunkterna till $f(x) = 3x^3 + 16|x-1|$

Lösning f är def och kont för alla $x \in \mathbb{R}$. f har en brytningspunkt i $x=1$ så $|x-1|$
 $|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -(x-1), & x < 1 \end{cases}$



där f ej deriverbar i $x=1$
 Vi kan skriva om
 $f(x) = 3x^3 + 16|x-1| =$

$$\begin{cases} 3x^3 + 16(x-1), & x \geq 1 \\ 3x^3 - 16(x-1), & x < 1 \end{cases}$$

Lokala extrempunkter ges
 av dels $x=1$ där $f'(x)$
 inte finns dels stationära
 punkter där $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} 9x^2 + 16, & x \geq 1 \\ 9x^2 - 16, & x < 1 \end{cases}$$

för $x \geq 1$ $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ är
 strängt växande

$$\text{för } x < 1 \quad f'(x) = 9x^2 - 16 = 0$$

$$9x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = \frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{4}{3} \cdot \text{Endast } x = -\frac{4}{3} \text{ ligger i intervall } x < 1$$

är en tabell mha första derivatans Test

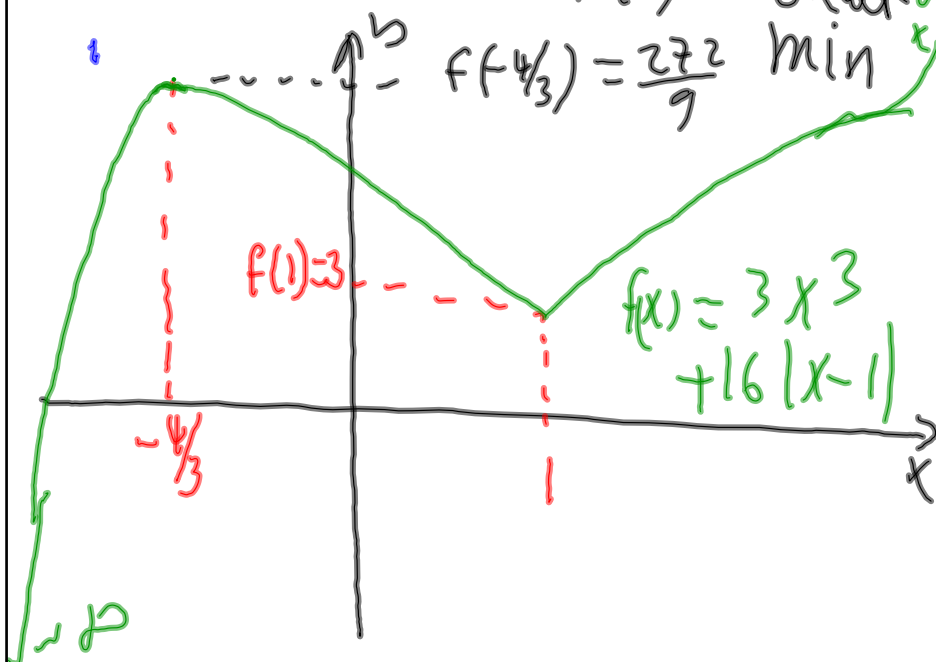
x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	1	∞
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$f(-\frac{4}{3})$	$f(1)$	$+\infty$

lokal max
lokal min

minsta och största värde
förfasnas

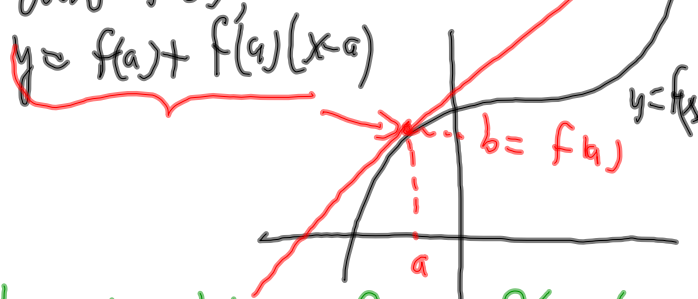
Svar Två lokala extrempunkter
 $x=1$, $x=-\frac{4}{3}$
i $x=-\frac{4}{3}$ har vi $f(-\frac{4}{3})$ lokalt max

i $x=1$ har vi $f(1)$ lokalt min
 $f(-\frac{4}{3}) = \frac{272}{9}$



Ex 3 a) Bestäm ekv för tangenten
till kurvan $y = x^2 \cos(x-2)$
i punkten med x-koordinat 2
b) Använd resultat i a) för
att beräkna ett närmevärde
till $f(1.8)$

Lösning Tangent ekvation
till $y = f(x)$ i punkten (a, b)
där $f(a) = b$ ges av



tangenten $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$
är en linjär approximation till
 $f(x)$ i $x=a$

$$f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

nära $x=a$

Svar i b) $f(1.8) \approx L(1.8)$

Finn tangent ekv. där $a=2$

$$y = f(2) + f'(2)(x-2)$$

$$f(x) = x^2 \cos(x-2) \Rightarrow f(2) = 4$$

$$y = 4 + f'(2)(x-2)$$

Finn $f'(2)$.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} (x^2 \cos(x-2)) =$$

$$= [\text{produkt regel}] =$$

$$= \cos(x-2) \frac{d}{dx} (x^2) + x^2 \frac{d}{dx} (\cos(x-2))$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \cos(x-2) \underbrace{\frac{d}{dx} (x^2)}_{2x} + x^2 \underbrace{\frac{d}{dx} \cos(x-2)}_{-\sin(x-2)}$$

$$\therefore f'(x) = 2x \cos(x-2) - x^2 \sin(x-2) \quad \text{where } \frac{d}{dx} (x-2) = 1$$

$$f'(2) = 2 \cdot 2 \underbrace{\cos(2-2)}_{=1} - 2^2 \underbrace{\sin(2-2)}_{=0}$$

$$\therefore f'(2) = 4$$

a) Delsvar tangenten ser

$$y = f(2) + f'(2)(x-2)$$

$$y = 4 + 4(x-2)$$

$$y = 4x - 4 = 4(x-1)$$

$$b) f(1.8) \approx L(1.8)$$

$$\text{där } L(x) = 4x - 4 = 4(x-1)$$

$$f(1.8) \approx 4(1.8-1) = 4 \cdot 0.8$$

$$\text{Svar } f(1.8) \approx 3.2$$

ex 4 skissa $f(x) = x e^{-x^2/2}$

och anges dess värdemängd

Lösning • $D(f) = \text{alla } x \in \mathbb{R}$

• f saknar lodräta asympt

ty f def för alla $x \in \mathbb{R}$

• Vågräta asymptoten!

Som ges av

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x e^{-x^2/2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{e^{x^2/2}} = 0$$

∴ x -akseln

• Sneda asymptoten dvs

på formen $y = ax + b$

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x e^{-x^2/2}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x^2/2} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = [a=0]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x e^{-x^2/2} = 0$$

Sneda asympt saknas

obs! singulara punkter saknas

Finn stationära punkter

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left(x e^{-x^2/2} \right) = e^{-x^2/2} \cdot \frac{d}{dx}(x) \\ &\quad + x \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2/2} \right) \\ &= e^{-x^2/2} \cdot 1 + x e^{-x^2/2} \frac{d}{dx} \left(-\frac{x^2}{2} \right) \end{aligned}$$

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot 1 + x e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx} \left(-\frac{x^2}{2} \right)$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{red bracket under } \frac{d}{dx} \left(-\frac{x^2}{2} \right) \text{ with } -x$$

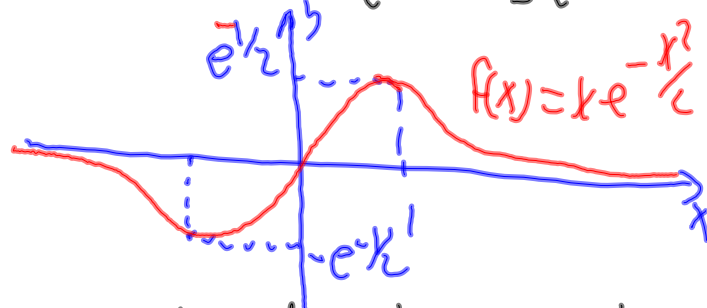
$$= e^{-\frac{x^2}{2}} (1 - x^2)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Gör en tabell mha första derivatan

Test

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1-x$	+	+	0	-
$1+x$	-	0	+	+
$f'(x) = (1-x)(1+x)e^{-\frac{x^2}{2}}$	-	0	+	0
$f(x)$	0	$f(-1) = -e^{-1/2}$	$f(1) = e^{-1/2}$	0



minst värde antas i $x = -1$
dvs $f(-1) = -e^{-1/2} = -\frac{1}{\sqrt{e}}$

största värde antas i $x = 1$
dvs $f(1) = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$$V(f): \left\{ y \in \mathbb{R} : -\frac{1}{\sqrt{e}} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{e}} \right\}$$