

# SF2715 Applied Combinatorics

## Handout, part I

Jakob Jonsson  
(modified and translated by Svante Linusson)

24 mars 2011

This is extra reading for the course, intended as a supplement to the course book:

*Peter J. Cameron, "Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms", Cambridge University Press, 1994.*

It contains both material that is not covered in the book or that we think needs to be explained in more detail. Also we there are a number of extra exercises. They are given a level of difficulty which is an estimate to how difficult the problem is. Even you think some estimate is incorrect, then please let us know.

The theory covered in this part will be:

**Section 1: Multiplication principle for generating functions.** A combinatorial interpretation of the product of two or more generating functions. This is a supplement to Section 4.2 in Cameron.

**Section 2: Counting words that avoids certain subwords of length 2.** We study a special and important class of problems that gives rise to linear recursions. We count words that avoids a given set of subwords of length 2. Such problems can be solved either with combinatorial ad-hoc arguments or with more systematic methods based on linear algebra. The resulting recursion can then be solved with methods such as described in Section 4.3 in Cameron.

# 1 Multiplication of generating functions

The multiplication principle for generating functions gives a combinatorial interpretation for the multiplication of two or more generating functions. It can be formulated in several ways, we will formulate it in terms of scoring points in a game.

Assume we have a game with a number of rounds. In every round the player is given a number of points. Let the number of ways of getting  $n$  points in one round be denoted by  $a_n$ .

Example:

- A round consists of tossing a coin until head shows. The number of points is the number of necessary tosses, including the last one, until head shows up. We get  $a_n = 1$  for  $n \geq 1$  and  $a_0 = 0$ , since the only way of getting  $n$  points is to get tail  $n-1$  times and then the coin will show heads.
- The game is to throw two ordinary dice, with six sides, and record the outcome of the sum of the two dice. The two dice are considered as being distinct, e.g. with different colors, so we can distinguish say  $1 + 5$  from  $5 + 1$ . Then

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}) = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1).$$

For example  $a_6 = 5$ , since we have the possibilities  $1 + 5$ ,  $2 + 4$ ,  $3 + 3$ ,  $4 + 2$  och  $5 + 1$ .

We will now give the general principle to find a formula for the number of ways to obtain a total of  $n$  points after  $k$  rounds.

**Theorem 1.1** *Let  $k \geq 1$ , and let  $a_{n,k}$  be the number of ways to get exactly  $n$  points after  $k$  rounds. Then*

$$\sum_{n \geq 0} a_{n,k} x^n = A^k,$$

where  $A = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ .

*Proof.* The number of ways to get the point suite  $(n_1, n_2, \dots, n_k)$  in  $k$  rounds is  $a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_k}$ . The total number of ways to get  $n$  points is thus

$$a_{n,k} = \sum_{n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n} a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_k}.$$

The right hand side is equal to the coefficient of  $x^n$  in the expansion of  $A^k$  and the theorem follows.  $\square$

More generally one could have the number of points being different in different rounds. Assume we play three rounds and  $a_n, b_n$  and  $c_n$  are the number of ways of getting  $n$  points in the first, second and third round respectively. If we let  $s_n$  be the number of ways to get the total score  $n$  we get as in Theorem 1.1 that

$$\sum_{n \geq 0} s_n x^n = \left( \sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) \cdot \left( \sum_{n \geq 0} b_n x^n \right) \cdot \left( \sum_{n \geq 0} c_n x^n \right).$$

We hope you understand the general multiplication principle from these examples.

## 2 Words avoiding certain subwords of length 2

Consider the following two problems.

- How many words can you construct from the letters R and G if there must be at least one G between any pair of R's? For  $n = 4$  we have the possibilities

$GGGG, GGGR, GGRG, GRGG, RGGG, GRGR, RGGR, RGRG.$

- A particle moves between four states denoted 0, 1, 2 and 3. The particle will always climb upwards, meaning that if it at a certain time step is in a state  $i \leq 2$  it will move to a state  $j > i$ . When it has reached state 3 it will automatically go to state 0 in the next step. In how many ways can the particle jump between the states in  $n$  time steps? For  $n = 3$  there are the possibilities

012, 013, 023, 030, 123, 130, 230, 301, 302, 303,

where  $abc$  means the sequence  $(a, b, c)$  of states.

This type of problems are common in combinatorics. In both these examples we can reformulate in terms of forbidden subwords of length 2. In the first case the forbidden subword is  $RR$ , since there always has to be a  $G$  between every pair of  $R$ . In the second example we shall avoid the subwords 00, 10, 11, 20, 21, 22, 31, 32 and 33, since the particle always moves upwards from states 0, 1 and 2, and always down to 0 from state 3.

We shall give a general method for attacking problems of this kind. Let  $Q$  be a set of symbols, which we will call the alphabet. For simplicity we will assume that  $Q = \{0, \dots, k-1\}$ . A *word over  $Q$*  is a sequence of symbols from  $Q$ . For example 000, 012 och 0211121101 are words over  $\{0, 1, 2\}$ .

Let  $X$  be a set of words over  $Q$  of length 2. We say that a word over  $Q$  is *legal* if it does not contain any subword from  $X$ . That is to say that the word do not contain two consecutive symbols that form a word in  $X$ . We say that the word *avoids  $X$*  or that the subwords in  $X$  are *forbidden*.

Let  $a_n$  be the number of legal words of length  $n$ . We shall give a method to find a linear recursion for the numbers  $a_n$ . First we need to state the Cayley-Hamilton Theorem:

**Theorem 2.1** *Let  $M$  be a  $k \times k$ -matrix with characteristic polynomial*

$$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I - M) = \sum_{i=0}^k r_i \lambda^i.$$

*Then*

$$\chi_M(M) = \sum_{i=0}^k r_i M^i = 0.$$

The proof of this theorem is not part of this course. Proofs can be found in books in linear algebra. An often used proof technique is to write  $M$  on Jordan

normal form. We will also need later that the characteristic polynomial is monic, that is, the leading coefficient  $r_k = 1$ .

Now, let  $M = (m_{ij})$  be the  $k \times k$ -matrix with rows and columns indexed by the symbols in  $Q$ , and such that  $m_{ij} = 0$  if  $ij \in X$  and  $m_{ij} = 1$  if  $ij \notin X$ . The value of  $m_{ij}$  thus depends on whether  $ij$  is a forbidden subword or not.

**Theorem 2.2** *For all  $n \geq 1$  we have that*

$$\sum_{i=0}^k r_i a_{n+i} = 0,$$

where  $\chi_M(\lambda) = \sum_{i=0}^k r_i \lambda^i$ .

*Proof.* For  $i \in Q$ , let  $a_{n,i}$  be the number of legal words of length  $n$  ending with the symbol  $i$ . Define

$$\mathbf{v}_n = (a_{n,0}, a_{n,1}, \dots, a_{n,k-1}).$$

Note that  $\mathbf{v}_1 = (1, 1, \dots, 1)$ , since all words of length 1 are legal. Now we get the identity

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n M, \tag{1}$$

or expressed differently,

$$a_{n+1,j} = \sum_{i=0}^{k-1} a_{n,i} m_{ij}.$$

for  $n \geq 1$ . This is true because if  $w$  is a legal word ending with  $i$  we know that  $wj$  is a legal word if and only if  $ij$  is a legal word.

By repeated usage of the identity (1) one arrives at

$$\mathbf{v}_{n+i} = \mathbf{v}_n M^i$$

for all  $i \geq 0$  and  $n \geq 1$ . Now, consider the characteristic polynomial  $\chi_M(\lambda) = \sum_{i=0}^k r_i \lambda^i$ . By Cayley-Hamilton theorem 2.1 we get  $\sum_{i=0}^k r_i M^i = 0$ , and hence

$$\mathbf{v}_n \sum_{i=0}^k r_i M^i = 0 \iff \sum_{i=0}^k r_i \mathbf{v}_n M^i = 0 \iff \sum_{i=0}^k r_i \mathbf{v}_{n+i} = 0.$$

Om vi summerar koordinaterna i varje vektor  $\mathbf{v}_{n+i}$  får vi slutligen

$$\sum_{i=0}^k r_i a_{n+i} = 0 \iff a_{n+k} = - \sum_{i=0}^{k-1} r_i a_{n+i}$$

for  $n \geq 1$ , since  $r_k = 1$ . □

Often it can be convenient to rewrite the last equation in the proof as

$$a_n = - \sum_{i=0}^{k-1} r_i a_{n-k+i},$$

where  $n \geq k + 1$ .

As an application we study the problem above with words over the alphabet  $\{R, G\}$  and forbidden set of subwords  $X = \{RR\}$ . Let  $a_n$  be the number of such words of length  $n$ . We want to show that  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  and that  $a_n$  is a Fibonacci number (see Section 4.1 i Cameron).

*Solution.* We define the matrix  $M$  as before Theorem 2.2:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

We have a zero in the upper left corner since the subword  $RR$  is forbidden. All other entries are ones, since  $RG$ ,  $GR$  och  $GG$  are legal subwords. The characteristic polynomial of  $M$  becomes

$$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

We now use Theorem 2.2 and get the recursion

$$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0 \iff a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$

which is what we wanted to prove. Since  $a_1 = 2$  and  $a_2 = 3$  every number  $a_n$  will be a Fibonacci number.

It is often possible to solve these kind of problems with more direct combinatorial methods. You are encouraged to find a different proof of the problem we just solved. It could give a better understanding of why the Fibonacci numbers occur, but it is clearly also very good to know that you master a reliable method that solves many problems of the same kind. Thus learning the above approach should be your top priority.

## Ö Övningsuppgifter

### Ö.1 Binomialkoefficientens värde

Syftet med denna uppgift är att ge ett bevis för att binomialkoefficienten  $\binom{n}{k}$  uppfyller identiteten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Låt  $0 \leq k \leq n$ . Använd följande procedur för att bilda en permutation av elementen i en mängd  $X$  av storlek  $n$ .

1. Välj ut  $k$  element.
2. Bilda en ordnad följd av dessa  $k$  element.
3. Bilda en ordnad följd av de återstående  $n - k$  elementen.
4. Bilda en permutation genom att sätta ihop de två följderna.

Visa med hjälp av ovanstående procedur att

$$n! = \binom{n}{k} \cdot k! \cdot (n-k)!.$$

*Svårighetsgrad: E*

### Ö.2 Ännu en rekursion för binomialkoefficienterna

Visa att

$$\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} + \binom{n-3}{k-2} + \binom{n-3}{k-1}.$$

*Svårighetsgrad: E*

### Ö.3 Binomialsatsen I

Använd binomialsatsen för att visa att

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^k = (-1)^n.$$

*Svårighetsgrad: E*

### Ö.4 Binomialsatsen II

Använd binomialsatsen för att visa att

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (2+x)^k = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k.$$

*Svårighetsgrad: C*

## Ö.5 Vem vet mest?

*Vem vet mest?* är en frågesporttävling på Sveriges Television där tolv deltagare tävlar om tre finalplatser. Kvalificeringstävlingen är uppdelad i två omgångar. I den första omgången får deltagarna svara på två frågor, och de som svarar fel på båda frågorna är utslagna. Den andra omgången är en sinnrikt konstruerad utslagstävling som pågår tills bara tre deltagare återstår. Dessa tre deltagare går vidare till finalen. (Vi antar att antalet personer som går vidare till den andra omgången alltid är minst tre.)

- (a) Med spelregler som ovan, visa att det finns 112640 sätt för de tolv deltagarna att fördela sig mellan grupperna “utslagna i första omgången”, “utslagna i andra omgången” och “kvalificerade för final”.

- (b) Ge ett kombinatoriskt bevis för identiteten

$$\sum_{r=k}^n \binom{n}{r} \binom{r}{k} = \binom{n}{k} 2^{n-k}.$$

(Det är tillåtet att lösa (a) genom att först lösa (b) och sedan stoppa in lämpligt valda parametrar.)

- (c) Ge ett algebraiskt bevis för identiteten i (b).

*Svårighetsgrad:* (a): E, (b): D, (c): C

## Ö.6 Växande följder av tal I

- (a) Låt  $k$  och  $n$  vara positiva heltal sådana att  $k \geq n$ . Beräkna antalet heltalsföljder  $(y_1, \dots, y_k)$  sådana att

$$1 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_k \leq n.$$

med egenskapen att vart och ett av talen  $1, 2, \dots, n$  förekommer minst en gång bland talen  $y_1, y_2, \dots, y_k$ .

- (b) Låt  $k$  och  $n$  vara positiva heltal sådana att  $n \leq k \leq 2n$ . Beräkna antalet heltalsföljder  $(y_1, \dots, y_k)$  sådana att

$$1 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_k \leq n.$$

med egenskapen att vart och ett av talen  $1, 2, \dots, n$  förekommer minst en gång och högst två gånger bland talen  $y_1, y_2, \dots, y_k$ .

*Svårighetsgrad:* D

## Ö.7 Växande följder av tal II

Ge ett direkt bevis för att följande två antal sammanfaller och är lika med  $\binom{n+k-1}{k}$ :

- Antalet heltalsföljder  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  sådana att

$$1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n + k - 1$$

(strikta olikheter).

- Antalet heltalsföljder  $(b_1, b_2, \dots, b_k)$  sådana att

$$1 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_k \leq n$$

(ej strikta olikheter). Detta är lika med antalet multimängder av storlek  $k$  över en mängd av storlek  $n$ .

*Ledning.* Försök transformera en följd av det andra slaget till en följd av det första slaget genom att addera lämpliga konstanter  $C_k$  till vart och ett av talen  $b_1, b_2, \dots, b_k$ . Vi vill alltså att

$$1 \leq b_1 + C_1 < b_2 + C_2 < \dots < b_k + C_k \leq n + k - 1.$$

*Svårighetsgrad:* C

## Ö.8 Genererande funktion för tärningskast

Låt  $n \geq 1$ , och låt  $a_{n,k}$  vara antalet sätt att få summan  $n$  då man kastar  $k$  stycken vanliga sexsidiga tärningar. Ange ett slutet uttryck för den genererande funktionen

$$\sum_{n=k}^{6k} a_{n,k} x^n.$$

Beräkna  $a_{10,3}$ .

*Svårighetsgrad:* E

## Ö.9 Slantsingling

För  $1 \leq n \leq r$ , låt  $a_{n,r}$  vara antalet sätt att singla slant  $r$  gånger så att klave dyker upp exakt  $n$  gånger och så att vi får klave vid den sista slantsinglingen.

- (a) Visa att

$$a_{n,r} = \binom{r-1}{n-1}.$$

- (b) Visa att

$$\sum_{r \geq n} \binom{r-1}{n-1} x^r = \frac{x^n}{(1-x)^n}.$$

*Ledning:* Dela in ovanstående slantsingling i  $n$  omgångar, och använd multiplikationsprincipen.

*Svårighetsgrad:* (a): E, (b): C, (c): D

### Ö.10 Summor på formen $t + 2u + 3v$

Låt  $a_n$  vara antalet tripplar  $(t, u, v)$  av icke-negativa heltal sådana att  $t+2u+3v = n$ . Ge en sluten formel för  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ .

*Svårighetsgrad: C*

### Ö.11 Ord som undviker 00

Låt  $Q$  beteckna alfabetet  $\{0, 1, 2\}$ , och låt  $a_n$  vara antalet ord över  $Q$  av längd  $n$  som inte innehåller delordet 00. Exempelvis är  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 8$  och  $a_3 = 22$ .

(a) Visa att

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

för  $n \geq 3$ .

(b) Visa att

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = \frac{3x + 2x^2}{1 - 2x - 2x^2}.$$

*Svårighetsgrad: D*

### Ö.12 Ord som undviker 00 och 11

Låt  $Q$  beteckna alfabetet  $\{0, 1, 2\}$ , och låt  $a_n$  vara antalet ord över  $Q$  av längd  $n$  som inte innehåller delorden 00 och 11. Exempelvis är  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 7$  och  $a_3 = 17$ .

(a) Visa att det finns tal  $r$  och  $s$  sådana att  $a_n = ra_{n-1} + sa_{n-2}$  för alla  $n \geq 3$ , och bestäm  $r$  och  $s$ .

(b) Skriv  $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$  som en rationell funktion.

*Svårighetsgrad: D*

### Ö.13 Ord som undviker 01

Låt  $Q$  beteckna alfabetet  $\{0, 1, 2\}$ , och låt  $a_n$  vara antalet ord över  $Q$  av längd  $n$  som inte innehåller delordet 01. Exempelvis är  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 8$  och  $a_3 = 21$ . Visa att det finns tal  $r$  och  $s$  sådana att  $a_n = ra_{n-1} + sa_{n-2}$  för alla  $n \geq 3$ , och bestäm  $r$  och  $s$ .

*Svårighetsgrad: D*

### Ö.14 Ord som undviker $ij$ om $|i - j| \geq 2$

Låt  $Q = \{0, 1, 2, 3\}$ , och låt  $X$  bestå av alla ord  $ij$  sådana att  $|i - j| \geq 2$ . Vi har alltså att  $X = \{02, 03, 13, 20, 30, 31\}$ . Låt  $a_n$  vara antalet ord över  $Q$  som undviker delorden i  $X$ .

(a) Visa att

$$a_{n+4} = 4a_{n+3} - 3a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$$

för  $n \geq 1$ .

(b) Man kan räkna ut att  $a_1 = 10$ ,  $a_2 = 26$ ,  $a_3 = 68$  och  $a_4 = 178$ . Använd detta för att visa att  $a_n = 2F_{2n+2}$  för  $n \geq 1$ , där  $F_i$  är det  $i$ :te Fibonacci-talet;  $F_0 = F_1 = 1$ .

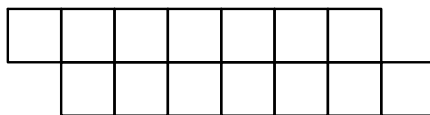
*Ledning.* Ett sätt att förenkla uträkningarna är att först visa att  $F_{2k+4} = 3F_{2k+2} - F_{2k}$  för  $k \geq 0$ .

*Svårighetsgrad:* (a): D, (b): C

### Ö.15 Grannfria konfigurationer av brickor på ett bräde

Studera ett bräde med två rader av kvadratiska rutor med  $n + 1$  rutor i varje rad. Plocka nu bort nedre vänstra och övre högra rutan från brädet. Figur 1 illustrerar fallet  $n = 7$ . Ange en rekursionsformel för antalet sätt att placera brickor på de  $2n$  återstående rutorna, där regeln är att man inte får lägga brickor på två rutor med gemensam kant.

*Svårighetsgrad:* B



Figur 1: Brädet i uppgift Ö.15 för  $n = 7$ .

### Ö.16 Delmängders kardinalitet modulo 3

För varje heltal  $n \geq 0$  och  $k \in \{0, 1, 2\}$ , låt  $\beta_{n,k}$  vara antalet delmängder till  $\{1, \dots, n\}$  vars kardinalitet är kongruent med  $k$  modulo 3.

(a) Använd ett kombinatoriskt resonemang för att bevisa att

$$\beta_{n+3,k} = 3 \cdot 2^n - \beta_{n,k}$$

för  $n \geq 0$  och  $k \in \{0, 1, 2\}$ .

(b) Använd identiteten i (a) för att visa att

$$\beta_{3m,k} = \begin{cases} (8^m + 2(-1)^m)/3 & \text{om } k = 0, \\ (8^m - (-1)^m)/3 & \text{om } k \in \{1, 2\} \end{cases}$$

för alla  $m \geq 0$ .

*Svårighetsgrad:* (a): B, (b): E

### Ö.17 Hoppningar av tal på avstånd högst 2

Låt  $a_n$  vara antalet sätt att dela in mängden  $\{1, \dots, 2n\}$  i  $n$  par så att avståndet mellan talen i varje par är högst 2. Exempelvis är  $a_2 = 2$ , ty hoppningarna  $\{1-2, 3-4\}$  och  $\{1-3, 2-4\}$  är tillåtna, medan hoppningen  $\{1-4, 2-3\}$  inte är det; avståndet mellan 1 och 4 i det första paret är större än 2. Visa att

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

för alla  $n \geq 2$ . Eftersom  $a_0 = a_1 = 1$  får vi alltså Fibonacciföljden.

*Svårighetsgrad: C*

### Ö.18 Hoppningar av tal på avstånd högst 3

Låt nu  $a_n$  vara antalet sätt att dela in mängden  $\{1, \dots, 2n\}$  i  $n$  par så att avståndet mellan talen i varje par är högst 3. Visa att

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-4}$$

för alla  $n \geq 4$ .

*Svårighetsgrad: A*

### Ö.19 Växande följder av tal III

Som bekant är  $a_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$  lika med antalet heltalsföljder  $(b_1, b_2, \dots, b_k)$  som uppfyller olikheterna

$$1 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_k \leq n.$$

(a) Låt

$$A_n(x) = \sum_{k \geq 0} a_{n,k} x^n.$$

Ge ett kombinatoriskt bevis för att

$$A_n(x) = 1 + x \sum_{i=1}^n A_i(x).$$

*Ledning:* Studera det sista elementet  $b_k$  i en given följd.

(b) Använd (a) för att visa att

$$A_n(x) = \frac{1}{(1-x)^n}.$$

*Svårighetsgrad: C*

## Ö.20 Icke-skärande hoppningar

Representera talen  $1, \dots, 2n$  som punkter på en cirkel, utspridda i växande ordning medurs. För en given hopparring av dessa  $2n$  punkter, dra ett linjestycke mellan varje par av hopparade punkter. Om linjestyckena inte skär varandra inuti cirkeln säger vi att hopparringen är icke-skärande. Exempelvis är hopparringen  $\{1-5, 2-8, 3-4, 6-7, 9-12, 10-11\}$  av talen  $1, \dots, 12$  skärande, ty linjestycket mellan punkt 1 och punkt 5 skär motsvarande linjestycke mellan 2 och 8 (studera urtavlan på en klocka). Algebraiskt kan vi uttrycka detta som att vi inte tillåter hoppningar som innehåller par  $a-c$  och  $b-d$  med egenskapen att

$$a < b < c < d.$$

Visa att antalet icke-skärande hoppningar av  $1, \dots, 2n$  är lika med det  $n$ :te Catalantalet  $C_n$  ( $C_{n+1}$  med Camerons notation).

*Ledning.* Bilda en rekursionsformel för det sökta antalet genom att studera det par som innehåller punkten  $2n$ .

*Svårighetsgrad:* B

## Ö.21 Oavgjord tävling där den ena spelaren aldrig leder

Två personer  $A$  och  $B$  spelar  $2n$  partier luffarschack och vinner  $n$  partier var. Efter varje omgång har  $A$  vunnit minst lika många partier som  $B$ . Visa att antalet sätt detta kan ske på är lika med det  $n$ :te Catalantalet  $C_n$  ( $C_{n+1}$  med Camerons notation).

*Ledning:* Bilda en rekursionsformel för det sökta antalet genom att studera det första tillfället i tävlingen då  $A$  och  $B$  har vunnit lika många partier. Bortse från tillfället i början av tävlingen då ställningen är 0-0.

*Svårighetsgrad:* A